Die Rekonstruktion der Urform aus einer vorgeschriebenen Kovariante.

Inaugural-Dissertation

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg

zur Erlangung der Doktorwürde

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Willy Bürger
aus Spandau.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548024_0088

Meinem lieben Vater

und

dem Andenken meiner teuren Mutter

in Dankbarkeit gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

I. Die symbolische Darstellung der In- und Kovarianten.

§ 1. Die Symbolik von Clebsch-Aronhold (Gordan). (Prinzip des besonderen Falles.) 9
§ 2. Die symbolische Darstellung der In- und Kovarianten. (Fundamentalsatz der Symbolik.) 16
§ 3. Die Cayleysche Symbolik. (Prinzip der Differentiationssymbolik.) 22
§ 4. Deutung der Clebsch-Aronholdschen Symbolik als Differentiationssymbolik 25

II. Die Rekonstruktion der Urform aus einer vorgeschriebenen Kovariante.

§ 5. Eine allgemeine Voraussetzung 30
§ 6. Die allgemeine Methode 32
§ 7. Der Zusatzterm 39

III. Spezielle Durchführung.

§ 8. Anwendung auf die Jakobische Kovariante. (Funktionaldeterminante.) 51
§ 9. Anwendung auf die Hessesche Kovariante 61
§ 10. Kovarianten einer Variabelnreihe. (Kovarianten im engeren Sinne.) 69

Einleitung.

In Band 33 der mathematischen Annalen hat Hilbert eine Abhandlung „Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante“ veröffentlicht, worin er die bereits vor ihm von Stephanos und Brill in einfachen Fällen beantwortete Frage nach der Zahl und Beschaffenheit jener Formenbüschel in allgemein gültiger Weise zum Abschluß bringt. An das Problem dieser Arbeiten knüpft die vorliegende Untersuchung an, deren Aufgabe es ist, Formen zu finden, die in irgendeiner gegebenen Kovariante übereinstimmen. Die Arbeit beschränkt sich also nicht bloß auf die Funktionaldeterminante, sondern sucht das Problem allgemeiner zu fassen. Die zur Lösung angewandte Methode stützt sich nicht so sehr auf die allgemeinen invariantentheoretischen Beziehungen der Formen untereinander, sondern stellt einen Algorithmus dar, den die prinzipielle Allgemeinheit des Problems bedingt. Dieser Algorithmus entspringt einer Anwendung der Theorie des „Operationskalküls“ [1]) auf die in der Invariantentheorie übliche symbolische Darstellung der Invarianten und Kovarianten. In einem ersten Teile vorliegender Arbeit werden wir uns daher mit dieser Symbolik zu beschäftigen haben. Eine ausführ-

[1]) vgl. Pincherle, Funktionaloperationen und -gleichungen. Enzykl. der math. Wissensch., Bd. 2, Heft 6. Speziell war die in England gebräuchliche Symbolik vorbildlich, die zur Auflösung gewisser Typen linearer Differentialgleichungen dient, und über die man sich in der inzwischen erschienenen zweiten Auflage des „Lehrbuchs der Differential-Gleichungen“ von Forsyth, deutsch von W. Jacobsthal (Kap. III), informieren kann.

lichere Darlegung der Clebsch-Aronholdschen Symbolik erschien zunächst um so mehr erwünscht, als dieselbe in den Lehrbüchern bisher nur eine kurze und schwer verständliche Behandlung erfahren hat. Bei der Durcharbeitung der Symbolik ergab sich zugleich ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Symbolik, den wir in § 2 mitteilen. Die Identifizierung der Clebschschen Symbolik mit der von Cayley stammenden operativen Methode zur Erzeugung von Invarianten und Kovarianten führt sodann mittels der Theorie des Operationskalküls zu der im zweiten Teile behandelten Aufgabe, die Urform zu rekonstruieren, wenn irgendeine ihrer Kovarianten gegeben ist. Um die Brauchbarkeit des dort aufgestellten Algorithmus darzutun, war es notwendig, eine größere Anzahl von Beispielen durchzuführen, von denen wir im dritten Teile einige bringen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Wellstein, für die bereitwillige Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit sowie für die vielseitige Anregung und Förderung während meiner Studienzeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

I. Die symbolische Darstellung der Invarianten und Kovarianten.

§ 1.

Die Symbolik von Clebsch-Aronhold (Gordan). (Das Prinzip des besonderen Falles.)

Ersetzt man die Variabeln x_1 und x_2 einer binären Form

$$f(a|x) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^{\nu} \tag{1}$$

durch Ausdrücke, die von neuen Veränderlichen ξ_1 und ξ_2 linear abhängen

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1\xi_1 + v_1\xi_2, \\ x_2 &= u_2\xi_1 + v_2\xi_2, \end{aligned} \tag{2}$$

so erhält man als Ergebnis dieser linearen Substitution eine neue Form

$$f(a'|\xi) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} a_\nu' \xi_1^{n-\nu} \xi_2^{\nu}, \tag{3}$$

deren Koeffizienten a_ν' lineare Funktionen

$$a_\nu' = f_\nu(a_0|a_1|\ldots|a_n) \tag{4}$$

der ursprünglichen Koeffizienten a_ν und rationale ganze Funktionen der Substitutionsparameter u_i und v_i sind. Als Invarianten von $f(a|x)$ bezeichnet man alsdann solche Funktionen $J(a)$ der Koeffizienten von f, die der Bedingung

$$J(a') = r^p J(a) \tag{5}$$

genügen, wenn r den Substitutionsmodul

$$r = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

bedeutet. Der Exponent p heißt das Gewicht der Invariante. Enthalten die Funktionen (5) überdies auch die Veränderlichen x_1 und x_2, so führen sie die Bezeichnung Kovarianten.

Zur Erzeugung und Untersuchung von Invarianten und Kovarianten haben Aronhold, Clebsch und Gordan[1]) ein symbolisches Verfahren entwickelt, auf dessen gründliche Erfassung es im folgenden ankommt. Zu diesem Zweck stellen wir der allgemeinen Form $f(a|x)$ eine spezielle Form $\varphi(\alpha|x)$ gegenüber, welche die n^{te} Potenz einer Linearform $\lambda_x \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ ist. Es sei also

$$(7) \quad \varphi(\alpha|x) = \lambda_x^n = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^n = \sum_0^n \binom{n}{\nu} \lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^{\nu} x_1^{n-\nu} x_2^{\nu}$$

oder kurz

$$(8) \quad \varphi(\alpha|x) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^{\nu},$$

wenn

$$(9) \quad a_\nu \equiv \lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^{\nu}$$

gesetzt ist. Durch die Substitution (2) möge (8) in

$$(10) \quad \varphi(\alpha'|\xi) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} a_\nu' \xi_1^{n-\nu} \xi_2^{\nu}$$

übergehen. Während sich nun für die transformierten Koeffizienten (4) ein bequemer Ausdruck nicht angeben läßt, lassen sich dieselben für den angenommenen Spezialfall (7) leicht berechnen. Es ist nämlich wegen (2)

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_1 (u_1 \xi_1 + v_1 \xi_2) + \lambda_2 (u_2 \xi_1 + v_2 \xi_2) \\ &= (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \xi_1 + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \xi_2 \\ &= \lambda_u \xi_1 + \lambda_v \xi_2. \end{aligned}$$

---

[1]) Aronhold, Crelles Journal, Bd. 39, 55 und 62; Clebsch, Crelles Journal, Bd. 59. Vgl. auch Clebsch, Theorie der binären Formen, Leipzig 1872; Faà di Bruno, Einleitung in die Theorie der binären Formen, Leipzig 1881; Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie, Leipzig 1887, Bd. 2; Fr. Meyer, Allgemeine Formen und Invariantentheorie, Leipzig 1909, Bd. 1.

Mithin

$$(12) \qquad \lambda_x^n = (\lambda_u \xi_1 + \lambda_v \xi_2)^n = \sum_0^n{}_\nu \binom{n}{\nu} \lambda_u^{n-\nu} \lambda_v^\nu \xi_1^{n-\nu} \xi_2^\nu .$$

Hieraus folgt durch Vergleich mit (10)

$$(13) \qquad a_\nu' = \lambda_u^{n-\nu} \lambda_v^\nu .$$

Zur besseren Übersicht stellen wir die Formeln des allgemeinen und des speziellen Falles noch einmal gegenüber:

Allgemeiner Fall:	Spezieller Fall:
(1) $f(a\|x) = \sum_0^n{}_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu$,	(8) $\varphi(\alpha\|x) = \sum_0^n{}_\nu \binom{n}{\nu} \alpha_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu$,
	(9) $\alpha_\nu \equiv \lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^\nu$,
(3) $f(a'\|\xi) = \sum_0^n{}_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu' \xi_1^{n-\nu} \xi_2^\nu$,	(10) $\varphi(\alpha'\|\xi) = \sum_0^n{}_\nu \binom{n}{\nu} \alpha_\nu' \xi_1^{n-\nu} \xi_2^\nu$,
(4) $a_\nu' = f_\nu(a_0\|a_1\|\ldots\|a_n)$,	(13) $\alpha_\nu' = \lambda_u^{n-\nu} \lambda_v^\nu$.

Der Vergleich der Formeln des allgemeinen Falles mit denen des Spezialfalles lehrt folgendes:

Den Koeffizienten a_ν der allgemeinen Form entsprechen die Koeffizienten (9) $\alpha_\nu \equiv \lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^\nu$ des speziellen Falles. Wenn wir daher in den Ausdrücken (4) die Substitution

$$(14) \qquad a_\nu = \alpha_\nu \equiv \lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^\nu$$

vornehmen, so müssen wir die Formeln (13) des speziellen Falles erhalten. Wichtiger ist jedoch, daß wir auch umgekehrt von den speziellen Formeln (13) zu den allgemeinen (4) eindeutig übergehen können. Denn substituieren wir in (4) die α vermöge (14), so daß (13) entsteht, so gerät kein einziges Glied in Fortfall, da zwischen den n eingesetzten Größen $\lambda_1^{n-\nu} \lambda_2^\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ keinerlei lineare Relationen mit von den α unabhängigen Koeffizienten bestehen, die eine solche Reduktion herbeizuführen gestatteten. Mithin enthält der aus (4) abgeleitete Ausdruck (13) genau soviele Terme als der ursprüngliche, und jedem Term von (13) ist gemäß (14) anzusehen, aus welchem Glied von (4) er hervorgegangen ist.

Hieraus folgt: Ersetzt man in den ausmultiplizierten Ausdrücken (13) jedes Aggregat $\lambda_1^{n-\nu}\lambda_2^{\nu}$ vermöge (14) durch a_ν, so erhält man die Formeln (4) des allgemeinen Falles eindeutig zurück.

Handelt es sich also darum, eine lineare Transformation einer allgemeinen Binärform n^{ter} Ordnung $f(x_1|x_2)$ auszuführen, so ordnen wir derselben die n^{te} Potenz λ_x^n einer Linearform $\lambda_x \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ zu und führen zunächst die Transformation für diesen speziellen Fall aus. Wenn wir uns dann vorbehalten, in den so erhaltenen Ausdrücken der transformierten Koeffizienten (13) nach erfolgter Ausmultiplizierung die Substitution (14) vorzunehmen, so können die Formeln des speziellen Falles als kondensierte Darstellung der allgemeinen gelten. Unter diesem Vorbehalt können wir daher symbolisch

$$\begin{aligned} f &= \lambda_x^n, \\ a_\nu &= \lambda_1^{n-\nu}\lambda_2^{\nu} \end{aligned} \tag{15}$$

setzen.

Der Algorithmus läßt sich offenbar verallgemeinern. Hat man z. B. einen Ausdruck Φ zu berechnen, der in den Koeffizienten a, b, c,... gewisser Grundformen

$$A(a|x),\ B(b|x),\ C(c|x),\ldots\ldots \tag{16}$$

von bezüglich den Ordnungen m, n, r,.... je linear ist, so ordnen wir jenen allgemeinen Formen (16) bezüglich die Potenzen

$$\alpha_x^m,\ \beta_x^n,\ \gamma_x^r,\ldots. \tag{17}$$

der Linearformen

$$\begin{aligned} \alpha_x &\equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \\ \beta_x &\equiv \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \\ \gamma_x &\equiv \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \text{ usw.} \end{aligned} \tag{18}$$

zu und berechnen Φ erst für diesen speziellen Fall. Der hierfür erhaltene Ausdruck φ ist dann ebenfalls ein Spezialfall der allgemeinen Funktion Φ und leitet sich aus dieser ab, wenn wir in Φ die Substitution

$$(19)\qquad \begin{aligned} a_\mu &= a_1^{m-\mu}\, a_2^{\mu}, \\ b_\nu &= \beta_1^{n-\nu}\, \beta_2^{\nu}, \\ c_\varrho &= \gamma_1^{r-\varrho}\, \gamma_2^{\varrho} \end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \\ \varrho \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots, \left\{\begin{matrix} m \\ n \\ r \end{matrix}\right.$$

vornehmen. Auch bei dieser Substitution wird nicht ein einziges Glied fortfallen, da zwischen den Aggregaten

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1^m, \quad \alpha_1^{m-1}\alpha_2, \quad \alpha_1^{m-2}\alpha_2^2, \ \ldots\ldots, \ \alpha_2^m, \\ &\beta_1^n, \quad \beta_1^{n-1}\beta_2, \quad \beta_1^{n-2}\beta_2^2, \ \ldots\ldots, \ \beta_2^n, \\ &\gamma_1^r, \quad \gamma_1^{r-1}\gamma_2, \quad \gamma_1^{r-2}\gamma_2^2, \ \ldots\ldots, \ \gamma_2^r \\ &— — — — — — — — — — \end{aligned}$$

keinerlei lineare Relationen mit von den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ unabhängigen Koeffizienten bestehen. Mithin enthält der aus Φ abgeleitete Ausdruck φ ebenso viele Terme als der ursprüngliche, und man sieht überdies jedem Term von φ an, aus welchem Glied von Φ er entstanden ist. Hieraus folgt: Ersetzt man in dem ausmultiplizierten Ausdruck φ die Aggregate (20) durch die ihnen in (19) zugeordneten Größen a_μ, b_ν, $c_\varrho, \ldots$, so gelangt man vom speziellen Ausdruck φ zum allgemeinen Φ eindeutig zurück.

Wenn also der Erfolg der Spezialisierung der ist, daß die Funktion φ sich durch einen bequemen Ausdruck darstellen läßt, etwa wie im vorigen Beispiel durch Potenzenprodukte, so liefert uns das Verfahren wiederum einen Algorithmus zur Berechnung der allgemeinen Funktion Φ. Wir können daher symbolisch

$$(21)\qquad \Phi = \varphi$$

setzen unter dem Vorbehalt, daß wir in dem ausgerechneten Ausdruck φ die genannte Substitution (19) vornehmen.

Diese Überlegung ist jedoch vorerst nur mit der ausdrücklich gemachten Voraussetzung berechtigt, daß die Funktion Φ in den Koeffizienten a, b, c, ... der Grundformen A, B, C, ... je linear ist. Ist dagegen Φ in den Koeffizienten einer

oder mehrerer jener Grundformen von höherem als dem ersten Grade, z. B. quadratisch, so ist die Rückkehr vom speziellen zum allgemeinen Fall nicht mehr eindeutig bestimmt. Denn während die Aggregate (20) selbst linear unabhängig sind, bestehen zwischen ihren Produkten zahlreiche Relationen, z. B.

$$(22)\quad \alpha_1^m \alpha_2^m = \alpha_1^{m-1}\alpha_2 \cdot \alpha_1 \alpha_2^{m-1} = \alpha_1^{m-2}\alpha_2^2 \cdot \alpha_1^2 \alpha_2^{m-2} = \ldots. \text{ usw.}$$

In diesem Falle kann also φ aus mehreren Ausdrücken Φ hervorgegangen sein oder auch weniger Terme enthalten als die allgemeine Funktion Φ, aus der φ in Wirklichkeit entstanden ist. Enthält z. B. Φ den Ausdruck

$$(23)\quad a_0 a_2 - a_1^2,$$

so müßte φ den Ausdruck

$$(24)\quad \alpha_1^m \cdot \alpha_1^{m-2}\alpha_2^2 - (\alpha_1^{m-1}\alpha_2)^2$$

enthalten. Diese Differenz ist aber identisch Null, kommt also in φ überhaupt nicht vor.

Gleichwohl läßt sich auch dieser Fall der symbolischen Behandlung zugänglich machen, falls Φ nun auch noch als homogen angenommen wird. Ist nämlich Φ etwa in den Koeffizienten einer Form $A(a|x)$ rational ganz und homogen vom Grade h, so denke man sich Φ aus einer Funktion $\Phi^{(h)}$ hervorgegangen, die an Stelle der einen Form A eben h Formen

$$(25)\quad A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, .., A^{(h)}$$

mit den Koeffizientenreihen

$$(26)\quad a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, a_\nu^{(3)}, \ldots, a_\nu^{(h)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

voraussetzt und die so gebaut ist, daß sie in allen diesen Koeffizienten (26) linear ist und in Φ übergeht, wenn man in (26) die oberen unterscheidenden Indizes fortläßt. Dieses Ziel erreicht man durch den Aronholdschen Prozeß. Wir ersetzen zu diesem Zweck in Φ die Koeffizienten a_ν der Reihe nach durch die ihnen entsprechenden $a_\nu^{(1)}$ und erhalten so eine Funktion $\Phi^{(1)}$.

Alsdann wenden wir auf $\Phi^{(1)}$ den Aronholdschen Prozeß $\sum_0^n a_\nu^{(2)} \frac{\partial}{\partial a_\nu^{(1)}}$ an, wodurch $\Phi^{(1)}$ in eine neue Funktion

$$\Phi^{(2)} = a_0^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial a_0^{(1)}} + a_1^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial a_1^{(1)}} + \cdots + a_n^{(2)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial a_n^{(1)}} \tag{27}$$

übergeht, welche in den Koeffizienten $a_\nu^{(2)}$ von $A^{(2)}$ linear ist, während sich der Grad in den Koeffizienten $a_\nu^{(1)}$ von $A^{(1)}$ um eine Einheit erniedrigt hat. Durch nochmalige Anwendung des Aronholdschen Prozesses $\sum_0^n a_\nu^{(3)} \frac{\partial}{\partial a_\nu^{(i)}}$ auf $\Phi^{(2)}$ erhält man eine dritte Form

$$\Phi^{(3)} = a_0^{(3)} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial a_0^{(1)}} + a_1^{(3)} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial a_1^{(1)}} + \cdots + a_n^{(3)} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial a_n^{(1)}}, \tag{28}$$

deren Grad in den Koeffizienten $a_\nu^{(1)}$ wiederum um 1 abgenommen hat, während sie in den Koeffizienten $a_\nu^{(2)}$ und $a_\nu^{(3)}$ der Formen $A^{(2)}$ und $A^{(3)}$ je linear ist. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens geht schließlich die Funktion Φ in eine Funktion $\Phi^{(h)}$ über, welche in den Koeffizienten aller Formen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, .., $A^{(h)}$ je linear ist und, abgesehen von einem rein numerischen Faktor, nach dem Satz von Euler über homogene Funktionen in die ursprüngliche Funktion Φ übergeht, wenn man die Formen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(h)}$ durch Fortlassen der oberen Indizes identisch gleichsetzt.

Stellt man jetzt $\Phi^{(h)}$ symbolisch dar, so kann diese Darstellung zugleich auch als Symbol für Φ selbst aufgefaßt werden, wenn man sich nur vorbehält, die Symbole

$$\alpha_1^{(1)n-\nu}\alpha_2^{(1)\nu},\ \alpha_1^{(2)n-\nu}\alpha_2^{(2)\nu},\ \ldots,\ \alpha_1^{(h)n-\nu}\alpha_2^{(h)\nu} \tag{29}$$

nicht nur als Repräsentanten der realen Koeffizienten (26), sondern auch als Symbole einer und derselben Größe a_ν zu deuten, in die jene Koeffizienten (26) übergehen, wenn man ihre oberen Indizes fortläßt. Das Verfahren läuft mit anderen Worten darauf hinaus, für a_ν mehrere Symbole

$$a_\nu = \alpha_1^{(1)n-\nu}\alpha_2^{(1)\nu} = \alpha_1^{(2)n-\nu}\alpha_2^{(2)\nu} = \cdots = \alpha_1^{(h)n-\nu}\alpha_2^{(h)\nu} \tag{30}$$

einzuführen und diese so anzuwenden, daß der entstehende Ausdruck in jeder dieser Symbolreihen homogen vom n^{ten} Grade ist. Jetzt ist offenbar die Rückkehr vom symbolischen zum realen Ausdruck oder, was dasselbe besagt, vom speziellen zum allgemeinen Fall eindeutig. Dagegen ist die symbolische Darstellung selbst noch mehrdeutig, indem z. B. $a_0 a_2 - a_1^2$ sowohl durch

(31) $$a_1^{(1)n} \cdot a_1^{(2)n-2} a_2^{(2)2} - a_1^{(1)n-1} a_2^{(1)} \cdot a_1^{(2)n-1} a_2^{(2)}$$

als auch durch

(32) $$a_1^{(2)n} \cdot a_1^{(1)n-2} a_2^{(1)2} - a_1^{(2)n-1} a_2^{(2)} \cdot a_1^{(1)n-1} a_2^{(1)}$$

dargestellt werden kann.

Man nennt die Symbole, die denselben realen Koeffizienten repräsentieren, äquivalent. Das Beispiel (31) und (32) zeigt, daß sich durch Vertauschung zweier äquivalenter Symbole mehrere Darstellungen desselben Ausdruckes ergeben können. Addiert man alle diese Ausdrücke und dividiert die Summe durch die Anzahl der Summanden, so erhält man eine neue symbolische Darstellung, die in den äquivalenten Symbolreihen symmetrisch ist, ein Verfahren, das sehr häufig zur Umformung symbolischer Ausdrücke angewendet wird.

§ 2.

Die symbolische Darstellung der Invarianten und Kovarianten. (Fundamentalsatz der Symbolik.)

Im vorangehenden war bisher noch nicht die Rede davon, daß der symbolisch darzustellende Ausdruck die Invarianteneigenschaft besitze. Handelt es sich nun speziell um die Darstellung von Invarianten und Kovarianten, so wird man hoffen dürfen, die Invariantennatur der dargestellten Ausdrücke dem symbolischen Ausdruck unmittelbar ansehen zu können. Ist symbolisch

(1) $$f(a|x) = a_x^n = \beta_x^n = \gamma_x^n = \cdots,$$

so ist

(2) $$(\alpha' \beta') = r\,(\alpha\,\beta)$$

und daher der Ausdruck $(\alpha\beta)^n$ wegen

$$(\alpha'\beta')^n = r^n (\alpha\beta)^n \tag{3}$$

das Symbol einer Invariante von f, wenn r den Substitutionsmodul (6) S. 9 und $(\alpha\beta)$ die Verbindung $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ bedeutet. Ebenso wird jedes symbolische Produkt von der Form

$$J = (\alpha\beta)^\mu (\alpha\gamma)^\nu (\beta\gamma)^\varrho \cdots \tag{4}$$

eine Invariante von f darstellen, vorausgesetzt, daß J in den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ homogen vom Grade n ist. Hieraus folgt:

Jede rationale ganze Funktion der Klammersymbole $(\alpha\beta), (\alpha\gamma), (\beta\gamma), \ldots$ stellt eine Invariante von f dar, wenn alle Terme der Funktion gleichviel dieser Klammersymbole enthalten und der Ausdruck in den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ je homogen zur Dimension n ist.

Von grundlegender Bedeutung für die Symbolik ist es nun, daß auch der umgekehrte Satz gilt:

Jede rationale ganze Invariante einer oder mehrerer Grundformen n^{ter} Ordnung stellt sich symbolisch als ganze rationale Funktion symbolischer Determinanten vom Typus $(\alpha\beta)$ dar, welche in allen Termen gleichviel dieser Klammersymbole enthält und in den auftretenden Symbolreihen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ je homogen zur Dimension n ist.

Unbeschadet der Allgemeingültigkeit können wir im Beweise dieses Satzes eine vereinfachende Voraussetzung machen. Es genügt nämlich, den Satz für den Fall einer Simultaninvariante von lauter Linearformen zu beweisen. Denn jede ganze rationale Invariante J(a), die in den Koeffizienten a einer beliebigen Grundform A(a|x) vom Grade n ist, läßt sich zunächst mit Hilfe des Aronholdschen Prozesses in eine Simultaninvariante Φ von n Grundformen A, B, C, ... überführen, die in den Koeffizienten aller dieser Formen linear ist. Stellt man alsdann Φ nach § 1 symbolisch dar, indem man den Grundformen A, B, C, ... volle Potenzen der Linearformen $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x \ldots$ zuordnet, so stellt der symbolische Ausdruck von

Φ gleichzeitig realiter eine ganze rationale Invariante der Linearformen selbst dar. Umgekehrt kann also jede reale ganze rationale Invariante von Linearformen α_x, β_x, $\gamma_x \cdots$ als Symbol einer Simultaninvariante gewisser Grundformen A, B, C ... aufgefaßt werden, die in den Koeffizienten derselben je linear ist. Können wir daher nachweisen, daß jede ganze rationale Invariante von Linearformen eine ganze rationale Funktion der Klammersymbole ist, welche in allen Gliedern gleichviel dieser Klammerfaktoren enthält, so ist damit der Fundamentalsatz bewiesen. Zu dem Zweck nehmen wir die Linearformen

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 , \\ \beta_x &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 , \\ \gamma_x &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 , \\ &\text{— — — — — —} \end{aligned} \tag{5}$$

an und unterwerfen dieselben der Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \xi_1 + v_1 \xi_2 , \\ x_2 &= u_2 \xi_1 + v_2 \xi_2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Es sei nun

$$\Phi \equiv \Phi (\alpha_1 | \alpha_2 , \beta_1 | \beta_2 , \gamma_1 | \gamma_2 , \cdots) \tag{7}$$

eine ganze rationale Invariante der Linearformen (5), die der Bedingung genügt

$$\Phi(\alpha_1' | \alpha_2' , \beta_1' | \beta_2' , \gamma_1' | \gamma_2' , \cdots) = (u\,v)^n \, \Phi(\alpha_1 | \alpha_2 , \beta_1 | \beta_2 , \gamma_1 | \gamma_2 , \cdots) , \tag{8}$$

worin

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_u , \quad \alpha_2' = \alpha_v , \\ \beta_1' &= \beta_u , \quad \beta_2' = \beta_v , \\ \gamma_1' &= \gamma_u , \quad \gamma_2' = \gamma_v , \\ &\text{— — — — — — —} \end{aligned} \tag{9}$$

zu setzen ist. Wir führen nun den Ω-Prozeß

$$\Omega_{uv} = \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial v_1} \tag{10}$$

ein[1]) und bilden

[1]) Diese Wendung dürfte neu sein.

(11) $$\Omega_{uv}^{n}\,\Phi' = \Omega_{uv}^{n}\,(u\,v)^{n}\,\Phi\,,$$

wobei unter Φ' die Transformierte von Φ verstanden ist. Da der Operator Ω auf der rechten Seite von (11) nur an dem Faktor $(u\,v)^n$ wirkt, so ergibt sich

(12) $$\Omega_{uv}^{n}\,\Phi' = \Phi\,\Omega_{uv}^{n}\,(u\,v)^{n}\,.$$

Nun ist aber

(13) $$(u\,v)^{n} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu}\,u_1^{\,n-\nu}\,v_2^{\,n-\nu}\,u_2^{\,\nu}\,v_1^{\,\nu}\,,$$

und anderseits

(14) $$\Omega_{uv}^{n} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial u_1^{\,n-\nu}\,\partial v_2^{\,n-\nu}\,\partial u_2^{\,\nu}\,\partial v_1^{\,\nu}}\,;$$

also folgt

(15) $$\Omega_{uv}^{n}\,(u\,v)^{n} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^{2n}\,u_1^{\,n-\nu}\,v_2^{\,n-\nu}\,u_2^{\,\nu}\,v_1^{\,\nu}}{\partial u_1^{\,n-\nu}\,\partial v_2^{\,n-\nu}\,\partial u_2^{\,\nu}\,\partial v_1^{\,\nu}} = P\,,$$

wo P als Summe positiver ganzer Zahlen selbst eine ganze Zahl bedeutet, auf deren absoluten Wert es nicht ankommt. Mithin ist

(16) $$\Omega_{uv}^{n}\,\Phi' = P\cdot\Phi\,.$$

Nun ist aber auch

(17) $$\Omega_{uv} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial v_1} \\ \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial v_2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha_1'}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1'} + \frac{\partial\beta_1'}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1'} + \cdots, & \frac{\partial\alpha_2'}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2'} + \frac{\partial\beta_2'}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial\beta_2'} + \cdots \\ \frac{\partial\alpha_1'}{\partial u_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1'} + \frac{\partial\beta_1'}{\partial u_2}\frac{\partial}{\partial\beta_1'} + \cdots, & \frac{\partial\alpha_2'}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2'} + \frac{\partial\beta_2'}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial\beta_2'} + \cdots \end{vmatrix}$$

oder

(18) $$\Omega_{uv} = \begin{vmatrix} \alpha_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1'} + \beta_1\frac{\partial}{\partial\beta_1'} + \cdots, & \alpha_1\frac{\partial}{\partial\alpha_2'} + \beta_1\frac{\partial}{\partial\beta_2'} + \cdots \\ \alpha_2\frac{\partial}{\partial\alpha_1'} + \beta_2\frac{\partial}{\partial\beta_1'} + \cdots, & \alpha_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2'} + \beta_2\frac{\partial}{\partial\beta_2'} + \cdots \end{vmatrix}.$$

Daher folgt durch Auflösen der Determinante (18)

$$(19) \qquad \Omega_{uv} = (\alpha\beta)\,\Omega_{\alpha'\beta'} + (\alpha\gamma)\,\Omega_{\alpha'\gamma'} + (\beta\gamma)\,\Omega_{\beta'\gamma'} + \cdots,$$

wobei auf der rechten Seite alle in Φ vorkommenden Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ miteinander gepaart auftreten. Auf die Reihenfolge der Symbole kommt es weiter nicht an, da

$$(20) \qquad (\alpha\beta)\,\Omega_{\alpha'\beta'} = (\beta\alpha)\,\Omega_{\beta'\alpha'}$$

ist. Nunmehr folgt aus (16) und (19)

$$(21) \qquad P \cdot \Phi = \left[(\alpha\beta)\,\Omega_{\alpha'\beta'} + (\alpha\gamma)\,\Omega_{\alpha'\gamma'} + \cdots\right]^n \Phi' .$$

Berücksichtigt man nun, daß die n-malige Anwendung des Ω-Prozesses den Grad von Φ' in den $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ je um n erniedrigt, so folgt, daß die rechte wie die linke Seite von (21) von den $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ frei ist. Daher ist die rechte Seite (21) eine rationale ganze Funktion der Klammersymbole $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\beta\gamma), \ldots$ mit rein numerischen Koeffizienten, wobei alle Terme der Funktion gleichviel dieser Klammerfaktoren enthalten. Damit ist der Fundamentalsatz bewiesen.

Um den Satz auch auf Kovarianten auszudehnen, beachte man, daß sich jede Kovariante durch eine geeignete Substitution in eine Invariante überführen läßt. Zu dem Zweck betrachten wir die Transformation der Linearform

$$(22) \qquad l_x = l_1 x_1 + l_2 x_2 .$$

Ist

$$(23) \qquad x_i = u_i \xi_1 + v_i \xi_2 \qquad (i = 1, 2)$$

die Substitution mit der Umkehrung

$$(24) \qquad \xi_1 = \frac{(x\,v)}{(u\,v)},\ \xi_2 = \frac{(u\,x)}{(u\,v)},$$

so geht l_x über in

$$(25) \qquad l_\xi' = l_1' \xi_1 + l_2' \xi_2 = l_u \xi_1 + l_v \xi_2 ,$$

worin also $l_1' = l_u$ und $l_2' = l_v$ ist. Es sei nun

$$(26) \qquad K = K(a, b, \ldots, x_1|x_2)$$

eine beliebige ganze und rationale Kovariante eines Systems von Grundformen A, B, ... gegeben. Bezeichnen wir ihr Gewicht mit p und ihre Ordnung in den $x_1|x_2$ mit π, so ist

(27) $K(a', b', \ldots, \xi_1|\xi_2) = (u\,v)^p\, K(a, b, \ldots, x_1|x_2)$

oder wegen (24)

(28) $K\left(a', b', \ldots, \frac{(x\,v)}{(u\,v)}\middle|\frac{(u\,x)}{(u\,v)}\right) = (u\,v)^p\, K(a, b, \ldots, x_1|x_2)\,.$

Hieraus folgt wegen der Homogenität in den $\xi_1|\xi_2$

(29) $K\left(a', b', \ldots, (x\,v)\,|\,(u\,x)\right) = (u\,v)^{p+\pi}\, K(a, b, \ldots, x_1|x_2)\,.$

Wir setzen nun hierin

(30) $\qquad x_1 = l_2 \text{ und } x_2 = -l_1$

dann wird

(31) $\qquad (x\,v) = l_v = l_2' \text{ und } (u\,x) = -l_u = -l_1'\,,$

und es ergibt sich

(32) $K(a', b', \ldots, l_2', -l_1') = (u\,v)^{p+\pi}\, K(a, b, \ldots, l_2, -l_1)\,;$

d. h. die Kovariante (26) ist in eine Invariante des ursprünglichen Systems und der Linearform l_x übergegangen, die in den Koeffizienten der Linearform homogen gebaut ist und deren Gewicht sich um π erhöht hat. Umgekehrt sei

(33) $\qquad J(a', b', \ldots, l_1', l_2') = (u\,v)^p\, J(a, b, \ldots, l_1, l_2)$

eine Invariante vom Gewicht p, die in den Koeffizienten einer Linearform l_x homogen zum Grade π ist; dann wird mit Rücksicht auf (25)

(34) $\qquad J(a', b', \ldots, l_u, l_v) = (u\,v)^p\, J(a, b, \ldots, l_1, l_2)$

oder wegen der Homogenität in den l_1 und l_2

(35) $\quad J\left(a', b', \ldots, \frac{l_u}{(u\,v)}, \frac{l_v}{(u\,v)}\right) = (u\,v)^{p-\pi}\, J(a, b, \ldots, l_1, l_2)\,.$

Die Substitution (30), umgekehrt ausgeführt, ergibt aber

(36)
$$\frac{l_u}{(u\,v)} = -\frac{(u\,x)}{(u\,v)} = -\xi_2\,,$$
$$\frac{l_v}{(u\,v)} = \frac{(v\,x)}{(u\,v)} = \xi_1\,.$$

Somit geht die Invariante (35) über in

(37) $J(a', b', \ldots, -\xi_2|\xi_1) = (u\,v)^{p-\pi}\, J(a, b, \ldots, -x_2|x_1)\,;$

d. h. J ist eine Kovariante geworden. Daher folgt:

Jede Kovariante vom Gewicht p und der Ordnung π in den Variabeln $x_1 | x_2$ geht durch die Substitution (30) in eine Simultaninvariante der Linearform l_x mit anderen Formen vom Gewicht $p + \pi$ über, und umgekehrt läßt sich aus jeder Invariante, die in den Koeffizienten l_1 und l_2 einer Linearform l_x homogen zum Grade π ist, durch die Substitution (30) eine Kovariante vom Gewicht $p - \pi$ herstellen.

Stellt man also die Invariante (33) symbolisch dar, so wird der entstehende Ausdruck eine ganze rationale Funktion der Klammersymbole $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$, ... und der Symbole (αl), (βl), (γl), ..., welche die Linearform berücksichtigen, wobei jeder Term gleichviel dieser Klammerfaktoren enthält. Da nun durch die Substitution (30) die Symbole (αl), (βl), (γl), ... in die Linearfaktoren α_x, β_x, γ_x, ... übergehen, so folgt:

Jede rationale ganze Kovariante einer oder mehrerer Grundformen n^{ter} Ordnung stellt sich symbolisch als ganze rationale Funktion von Produkten symbolischer Determinanten vom Typus $(\alpha\beta)$ mit linearen Faktoren vom Typus α_x dar, die in allen Termen gleichviel Klammersymbole und Linearfaktoren besitzt und in den auftretenden Symbolreihen je homogen zur Dimension n ist.

§ 3.

Die Cayleysche Symbolik. (Prinzip der Differentiationssymbolik.)

Mit der Clebsch-Aronholdschen Symbolik ist der äußeren Form nach die Cayleysche Symbolik[1]) vollkommen identisch;

[1]) vgl. Cayley's Pap. 1, p. 80 ff. oder auch Mémoire sur les hyperdéterminants, Crelles Journ., Bd. 30, 34; Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra (deutsch von Fiedler), Dublin 1866, 2. edit., p. 130 ff.

Cayley legt jedoch seinen Symbolen einen ganz anderen Sinn unter. Die Clebsch-Aronholdsche Symbolik beruht, wie wir gesehen haben, auf dem Prinzip des besonderen Falles, d. h. sie spezialisiert den allgemeinen Fall derart, daß die auszuführende Rechnung sich leicht übersehen läßt und hinterher der Rückweg vom speziellen zum allgemeinen Fall eindeutig offen bleibt. Die Cayleysche Symbolik dagegen ist eine Differentiationssymbolik, die davon ausgeht, daß die symbolische Determinante

$$\Omega_{xy} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{1}$$

selbst Invariantennatur besitzt und daher imstande ist, Invarianten und Kovarianten zu erzeugen. Sind nämlich $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$ zwei Reihen kogrediente Veränderliche, d. h. solche, die einer und derselben Substitution

$$\begin{aligned} x_i &= \lambda_i \xi_1 + \mu_i \xi_2, \\ y_i &= \lambda_i \eta_1 + \mu_i \eta_2 \end{aligned} \qquad (i = 1,2) \tag{2}$$

unterworfen werden, so gilt bekanntlich die Relation

$$\Omega_{\xi\eta} = (\lambda\mu)\,\Omega_{xy}. \tag{3}$$

Wesentlich für die Symbolik ist es nun, daß man das Zeichen des n^ten Differentialquotienten $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ rein formell als n^te Potenz $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$ von $\frac{\partial}{\partial x}$ auffaßt, so daß die n-malige Ausübung des Prozesses (1) sich in den kurzen Ausdruck der symbolischen Potenz

$$\begin{aligned} \Omega_{xy}^n &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^n \\ &= \sum_0^n \binom{n}{\nu} (-1)^\nu \frac{\partial^{2n}}{\partial x_1^{n-\nu}\,\partial y_2^{n-\nu}\,\partial x_2^{\nu}\,\partial y_1^{\nu}} \end{aligned} \tag{4}$$

zusammenziehen läßt, die ebenfalls Invariantennatur zeigt. Läßt man überdies noch mehr Reihen Veränderliche

$$x_1|x_2,\ y_1|y_2,\ z_1|z_2,\ \ldots,\ u_1|u_2,\ v_1|v_2 \tag{5}$$

zu, die alle der gleichen Substitution (2) unterliegen, so ist

ohne weiteres einleuchtend, daß auch jedes beliebige Produkt aus den (5) entsprechenden Grundsymbolen

(6) $$\begin{array}{llllll} \Omega_{xy}, & \Omega_{xz}, & \ldots\ldots, & \Omega_{xu}, & \Omega_{xv}, & \\ & \Omega_{yz}, & \ldots\ldots, & \Omega_{yu}, & \Omega_{yv}, & \\ & & & & & \Omega_{uv} \end{array}$$

von der Form

(7) $$\Omega_{xy}^{m} \cdot \Omega_{xz}^{n} \ldots\ldots \Omega_{yz}^{p} \ldots\ldots \Omega_{uv}^{r}$$

bei gleichzeitiger Ausführung der Substitution für alle Reihen (5) der Invariantenbedingung genügt und daher imstande sein muß, Invarianten und Kovarianten zu erzeugen. Einen strengen Beweis nicht nur dafür, daß der Ω-Prozeß überhaupt Formen mit Invariantennatur schafft, sondern daß man auf diesem Wege auch sämtliche Invarianten und Kovarianten eines gegebenen Systems erhält, hat Hilbert in seiner Abhandlung „Über die Theorie algebraischer Formen“ gegeben.[1]) Dieser Satz ist, wie sich zeigen wird, nur eine andere Fassung des Fundamentalsatzes der Symbolik (vgl. § 2), so daß wir nicht weiter darauf einzugehen brauchen.

Handelt es sich nun um die Darstellung von Invarianten und Kovarianten eines Systems von Grundformen

(8) $$A(x_1|x_2),\ B(x_1|x_2),\ C(x_1|x_2),\ \ldots.,\ H(x_1|x_2),$$

so muß der anzuwendende Operator so beschaffen sein, daß der entstehende Ausdruck in den Koeffizienten der Formen (8) je homogen wird. Zu dem Zweck erteilt man vorübergehend jeder Grundform (8) ein anderes Variabelnpaar, etwa indem man setzt

(9) $$A(x_1|x_2),\ B(y_1|y_2),\ C(z_1|z_2),\ \ldots.,\ H(v_1|v_2),$$

und nimmt in den zugehörigen Operator so viel voneinander verschiedene Grundsymbole (6) auf, daß nach sämtlichen in (9)

[1]) Math. Annalen, Bd. 36. Daß der Hilbertsche Operator nicht nach den Variabeln, sondern nach den Parametern der angewandten Substitution differenziert, bedeutet keinen wesentlichen Unterschied, da beide Operatoren sich nur durch einen Faktor unterscheiden, dem selbst Invariantennatur zukommt.

enthaltenen Variabeln differenziert wird. Ein solcher Operator wird etwa die Form (7) haben. Führt man alsdann in dem ausgerechneten Produkt der leeren Symbole (7) die Formen (9) als Objekte der Differentiationen ein, so erhält man in

(10) $\Omega^{m}_{xy}\,\Omega^{n}_{xz} \ldots . \; \Omega^{r}_{uv}\,A(x_1|x_2)\cdot B(y_1|y_2) \ldots . \; H(v_1|v_2)$

alle Kovarianten des Systems (8) unter dem Vorbehalt, daß man nach erfolgter Ausrechnung $x_i \equiv y_i \equiv z_i \equiv \ldots \equiv v_i$ setzt. Enthält der so entstehende Ausdruck (10) die Variabeln nicht mehr, so stellt er eine Invariante von (8) dar.

Die in (10) symbolisch dargestellten Funktionen sind aber in den Koeffizienten von (8) zunächst nur linear; will man nun auch Invarianten und Kovarianten höheren Grades bilden, z. B. solche, die in den Koeffizienten von A quadratisch sind, so hat man an Stelle von A zwei neue Formen A′ und A″ mit bezüglich den Variabeln $x'_1|x'_2$ und $x''_1|x''_2$ einzuführen und in den zugehörigen Operator ein entsprechendes Grundsymbol $\Omega_{x'x''}$ mehr aufzunehmen. Nach erfolgter Ausrechnung läßt man dann nicht nur die Variabeln, sondern auch die Formen A′ und A″ selbst identisch gleich werden.

Von dem Gesichtspunkt ausgehend, daß die Einführung der Formen (9) in das Produkt der leeren Symbole (7) als selbstverständlich betrachtet werden darf, können die von ihren Objekten losgelösten Operatoren (7) als symbolische Darstellungen der Invarianten und Kovarianten aufgefaßt werden.

§ 4.

Deutung der Clebsch-Aronholdschen Symbolik als Differentiationssymbolik.

So verschieden auch die Symboliken bei Clebsch-Aronhold und Cayley erscheinen mögen, so stimmen sie in ihrer äußeren Form, wie schon gesagt, vollkommen überein und lassen sich daher leicht ineinander überführen. Dieser Zusammenhang dürfte bisher nicht allgemein beachtet worden

sein,[1]) zumal da die Cayleysche Symbolik in der deutschen mathematischen Literatur weniger verbreitet ist. Scheint es daher schon aus diesem Grunde angebracht zu sein, beide Symboliken miteinander zu vergleichen, so liegt ein solcher Vergleich auch im Sinne unseres Problems. Der weiter unten behandelte Algorithmus schließt sich nämlich der Cayleyschen Symbolik an, und es kann daher die Notwendigkeit vorliegen, den Ausdruck irgendeiner Kovariante, falls derselbe in Clebschscher Symbolik gegeben ist, in den entsprechenden der Cayleyschen Symbolik überzuführen.

Der Übergang von der einen zur anderen Symbolik wird sofort ersichtlich, falls man auch in der Clebschschen Symbolik den einzelnen Formen des gegebenen Systems vorübergehend ein anderes Variabelnpaar zuweist unter dem Vorbehalt, hinterher die Variabeln der Formen wieder identisch gleich werden zu lassen. Es sei also

$$\begin{aligned} &A(x_1|x_2) = a_x^m = a'^m_x = a''^m_x = \cdots, \\ (1)\qquad &B(y_1|y_2) = b_y^n = b'^n_y = b''^n_y = \cdots, \\ &C(z_1|z_2) = c_z^r = c'^r_z = c''^r_z = \cdots, \end{aligned}$$

ein System von Grundformen von bezüglich den Ordnungen m, n, r, ..., in welchem jede Form ein anderes Variabelnpaar enthält. Wir bezeichnen nun die symbolischen Operationen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1} \text{ mit } \alpha_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ mit } \alpha_2, \\ (2)\qquad &\frac{\partial}{\partial y_1} \text{ mit } \beta_1, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} \text{ mit } \beta_2, \\ &\frac{\partial}{\partial z_1} \text{ mit } \gamma_1, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} \text{ mit } \gamma_2, \end{aligned}$$

[1]) Indessen fehlt es nicht an Hinweisen, daß beide Symboliken identisch sind; vgl. u. a. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. 1, Teil 1, S. 276/77; s. a. Cayley's Pap. 1, p. 585; ferner Clebsch, Binäre Formen, p. 28, Fußnote.

und die ν-malige Ausübung derselben

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\,\nu}} \text{ mit } \alpha_1^{\,\nu}, & \frac{\partial^\nu}{\partial x_2^{\,\nu}} \text{ mit } \alpha_2^{\,\nu}, \\ \frac{\partial^\nu}{\partial y_1^{\,\nu}} \text{ mit } \beta_1^{\,\nu}, & \frac{\partial^\nu}{\partial y_2^{\,\nu}} \text{ mit } \beta_2^{\,\nu}, \\ \frac{\partial^\nu}{\partial z_1^{\,\nu}} \text{ mit } \gamma_1^{\,\nu}, & \frac{\partial^\nu}{\partial z_2^{\,\nu}} \text{ mit } \gamma_2^{\,\nu}, \end{array}$$

— — — — — — — — —.

Dann ist

$$\begin{array}{ll} m\, a_x^{m-1}\, a_1 = \alpha_1\, A\,(x_1|x_2), & m\, a_x^{m-1}\, a_2 = \alpha_2\, A\,(x_1|x_2), \\ n\, b_y^{n-1}\, b_1 = \beta_1\, B\,(y_1|y_2), & n\, b_y^{n-1}\, b_2 = \beta_2\, B\,(y_1|y_2), \\ r\, c_z^{r-1}\, c_1 = \gamma_1\, C\,(z_1|z_2), & r\, c_z^{r-1}\, c_2 = \gamma_2\, C\,(z_1|z_2), \end{array}$$

— — — — — — — — — — — — — —.

Daher wird z. B.

$$(5)\qquad m\,n\,(a\,b)\,a_x^{m-1}\,b_y^{n-1} = (\alpha\,\beta)\,A(x_1|x_2)\cdot B(y_1|y_2),$$

wobei $(a\,b)$ die Verbindung $a_1b_2 - a_2b_1$ bedeutet. Ebenso ist

$$\begin{array}{l} m\,(m-1)\ldots(m-h+1)\; a_x^{m-h}\, a_i^h = \alpha_i^h\, A, \\ n\,(n-1)\ldots(n-h+1)\; b_y^{n-h}\, b_i^h = \beta_i^h\, B, \\ r\,(r-1)\ldots(r-h+1)\; c_z^{r-h}\, c_i^h = \gamma_i^h\, C, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \quad i = 1, 2; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h = 1, 2, \ldots \left\{ \begin{array}{l} m \\ n. \\ r \end{array} \right. \end{array} \qquad (6)$$

Hieraus folgt beispielsweise für die in Clebschscher Symbolik dargestellten Ausdrücke

$$(7)\qquad m\,n\,(m-1)\,(n-1)\,(a\,b)^2\,a_x^{m-2}\,b_y^{n-2} = (\alpha\,\beta)^2\,A\cdot B,$$

$$m\,n\,(m-1)\,(n-1)\,(m-2)\,(n-2)\,(a\,b)^3\,a_x^{m-3}\,b_y^{n-3} = (\alpha\,\beta)^3\,A\cdot B,$$

$$m^2n^2r^2\,(a\,b)\,(b\,c)\,(a\,c)\,a_x^{2m-2}b_y^{2n-2}c_z^{2r-2} = (\alpha\,\beta)\,(\beta\,\gamma)\,(\alpha\,\gamma)\,A\cdot B\cdot C$$

u. a. m.

Bis auf die geringe Abweichung in der Bezeichnung der Variabeln stellen die linken Seiten von (7) die symbolischen Aus-

drücke für Kovarianten in Clebschscher Symbolik dar, während auf den rechten Seiten die entsprechenden Kovarianten in Cayleyscher Symbolik stehen. Der Vergleich lehrt, daß man beim Übergang von der Clebschschen zur Cayleyschen Symbolik nur auf die Klammersymbole vom Typus (ab) zu achten hat, nicht auf die Faktoren vom Typus a_x. Man erhält, von einem rein numerischen Faktor abgesehen, den Cayleyschen Ausdruck aus dem Clebschschen, indem man in letzterem die lateinischen Symbole a, b, c... durch die entsprechenden griechischen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ersetzt und diese gemäß (2) als Differentiationssymbole deutet. Die Linearfaktoren vom Typus a_x aber liefern hierbei keine Beiträge, da z. B. das a_x entsprechende Differentiationssymbol

$$(8) \qquad a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

von einem Zahlfaktor abgesehen, nach dem Eulerschen Theorem homogener Funktionen die Form $A(x_1|x_2)$ nur regenerieren würde.

Das gleiche Resultat ergibt sich bei der Darstellung von Kovarianten höheren Grades. In diesem Falle hat man nur zu setzen: (9)

$$A'(x_1'|x_2') = a'^{m}_{x'}, \quad A''(x_1''|x_2'') = a''^{m}_{x''}, \quad A'''(x_1'''|x_2''') = a'''^{m}_{x'''}, \ldots,$$

$$B'(y_1'|y_2') = b'^{n}_{y'}, \quad B''(y_1''|y_2'') = b''^{n}_{y''}, \quad B'''(y_1'''|y_2''') = b'''^{n}_{y'''}, \ldots,$$

$$C'(z_1'|z_2') = c'^{r}_{z'}, \quad C''(z_1''|z_2'') = c''^{r}_{z''}, \quad C'''(z_1'''|z_2''') = c'''^{r}_{z'''}, \ldots,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

mit der Vereinbarung, hinterher $A' \equiv A'' \equiv A''' \equiv \ldots \equiv A$, $B' \equiv B'' \equiv B''' \equiv \ldots \equiv B$ usw. aufzufassen. Unter diesem Vorbehalt mögen alsdann die symbolischen Operationen

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i'} \text{ mit } \alpha_i', \quad \frac{\partial}{\partial x_i''} \text{ mit } \alpha_i'', \ \ldots, \\ &\frac{\partial}{\partial y_i'} \text{ mit } \beta_i', \quad \frac{\partial}{\partial y_i''} \text{ mit } \beta_i'', \ \ldots, \\ &\frac{\partial}{\partial z_i'} \text{ mit } \gamma_i', \quad \frac{\partial}{\partial z_i''} \text{ mit } \gamma_i'', \ \ldots, \\ &— — — — — — — — — \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Dann ist z. B.

$$m^2(m-1)^2(a\,a')^2 a_x^{m-2} a'^{m-2}_{x'} = (\alpha\,\alpha')^2 A\cdot A',$$

$$(11) \qquad [m(m-1)(m-2)\ldots 1]^2(a\,a')^m = (\alpha\,\alpha')^m A\cdot A',$$

$$m^3(m-1)^3(a\,a')(a'a'')(a''a)\, a_x^{m-2} a'^{m-2}_{x'} a''^{m-2}_{x''} = (\alpha\,\alpha')(\alpha'\alpha'')(\alpha''\alpha) AA'A'',$$

$$m^2 n(m-1)^2(n-1)(a\,a')(a'\,b)(b\,a)\, a_x^{m-2} a'^{m-2}_{x'} b_y^{n-2} = (\alpha\,\alpha')(\alpha'\beta)(\beta\,\alpha) A\,A'B$$

usw.

Hieraus ergibt sich, daß während die Clebsch-Aronholdsche Symbolik alle ganzen rationalen Kovarianten mittels der Symbole vom Typus (a b) in Verbindung mit den Symbolen vom Typus a_x darstellt, die Cayleysche Symbolik dieselben Ausdrücke mit Hilfe der Klammersymbole allein wiederzugeben vermag. Die Beispiele (11) und (7) zeigen ferner ganz allgemein, daß die Clebsch-Aronholdsche Symbolik auch als Differentiationssymbolik gedeutet werden kann. Man hat zu diesem Zweck nur die lateinischen Buchstaben in den Klammersymbolen durch die entsprechenden Buchstaben des griechischen Alphabets zu ersetzen, denen gemäß (2) die Bedeutung von Differentialoperationen zukommt. An Stelle der Linearfaktoren vom Typus a_x treten alsdann die Funktionen A, A', .., B, B', ... usw. des gegebenen Systems als selbstverständliche Objekte der Differentiation. Hieraus folgt dann weiter, daß die Cayleysche Symbolik wie die Aronholdsche nicht nur stets Invarianten liefert, sondern auch alle Invarianten und Kovarianten darzustellen vermag.

II. Die Rekonstruktion der Urform aus einer vorgeschriebenen Kovariante.

§ 5.

Eine allgemeine Voraussetzung.

Im vorangehenden haben wir kurz die beiden Methoden skizziert, mit deren Hilfe man zu jeder beliebigen Form die zugehörigen Kovarianten zu bilden vermag. Es ist nun von Interesse zu erfahren, inwieweit sich das Problem umkehren läßt, d. h. inwieweit sich die Urform bestimmen läßt, wenn irgendeine ihrer Kovarianten gegeben ist. Es handelt sich also mit anderen Worten um die Aufgabe, alle Urformen zu finden, die in einer vorgegebenen Kovariante übereinstimmen. Eine Kovariante einer gegebenen Form ist für sich genommen wiederum eine Form, deren Ordnung in gesetzmäßiger Weise mit der Ordnung der Ausgangsform zusammenhängt. Allein die Kovarianten sind im allgemeinen Formen ganz spezieller Natur. Betrachten wir z. B. die Hessesche Kovariante der Grundform

$$A(x_1|x_2) = a_x^n = b_x^n = \cdots . \tag{1}$$

Sie lautet in Clebsch-Aronholdscher Symbolik

$$H(x_1|x_2) = (a\,b)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}. \tag{2}$$

Die Ordnung von H ist $2n-4$, mithin beträgt die Anzahl ihrer Koeffizienten $2n-3$. Die ursprüngliche Form (1) aber besitzt nur $n+1$ Koeffizienten. Hieraus ergibt sich folgende Tabelle:

Ordnung der Form n	Anzahl der Koeffizienten der Form n+1	der Hesseschen Kovariante 2n—3
2	3	1
3	4	3
4	5	5
5	6	7
6	7	9

Es lassen sich demnach 3 Fälle unterscheiden:

1. $n = 4$. Die Hessesche Kovariante einer biquadratischen Form ist selbst wieder eine biquadratische Form; jede dieser beiden Formen hat 5 Koeffizienten. In diesem Falle ist, wie die Theorie der biquadratischen Formen zeigt, die Hessesche Kovariante eine allgemeine Form 4. Ordnung, falls die Grundform allgemein ist.

2. $n < 4$. Der Fall $n = 2$ kommt nicht in Betracht, da die Hessesche Kovariante einer quadratischen Form mit ihrer Diskriminante zusammenfällt, also eine Invariante ist. Die Hessesche Kovariante der kubischen Form ist von der zweiten Ordnung und hat demnach 3 Koeffizienten. Sind also die Koeffizienten der kubischen Form unabhängige Veränderliche, so ist die Hessesche Kovariante eine allgemeine quadratische Form.

3. $n > 4$. In diesem Falle ist die Anzahl der Koeffizienten der Kovariante größer als die der Urform. Es besteht daher z. B. für $n = 5$ eine Beziehung zwischen den 7 Koeffizienten der Hesseschen Form.

Die Kovarianten sind also oft spezielle Formen, und es erhebt sich somit die Frage, wodurch eine gegebene Form als Kovariante einer anderen charakterisiert ist. Diese Frage zu entscheiden, verlangt eine besondere Untersuchung, die nicht im Rahmen dieser Arbeit liegt. Wir werden bei unseren Betrachtungen allgemein voraussetzen, daß die gegebene Form

wirklich eine Kovariante ist, eine Bedingung, die wir am besten dadurch erfüllen, daß wir zuerst zu einer beliebigen Form eine bestimmte Kovariante bilden und dann rückwärts aus ihr die Urform zu rekonstruieren suchen.

§ 6.

Die allgemeine Methode.

Der in der Cayleyschen Symbolik zur Darstellung von Invarianten und Kovarianten benutzte Ω-Prozeß ist ein distributives Operationssymbol. Sind nämlich u und v irgend zwei Funktionen und $\varkappa$ ein konstanter Faktor, so gelten die beiden distributiven Gesetze

$$\begin{aligned} \Omega(u + v) &= \Omega(u) + \Omega(v), \\ \Omega(\varkappa u) &= \varkappa \Omega(u). \end{aligned} \tag{1}$$

Da nun die n-malige Ausführung der Operation Ω sich in den kurzen Ausdruck der n^{ten} Potenz Ω^n zusammenziehen läßt, so gehorcht der Operator Ω auch dem Gesetz der Indizes

$$\Omega^m \Omega^n = \Omega^{m+n}. \tag{2}$$

Dieses letztere Gesetz legt es nahe, die Erweiterung des Potenzbegriffes der Arithmetik auf negative Exponenten und den Exponenten Null auch auf den Operator Ω auszudehnen. Soll also (2) auch für verschwindende und negative ganzzahlige Werte des Exponenten gelten, so folgt, weil dann für $n = 0$

$$\Omega^m \Omega^0 = \Omega^m \tag{3}$$

ist, daß Ω^0 als der identische Operator

$$\Omega^0 = 1 \tag{4}$$

oder als Operator der Identitätssetzung zu deuten ist, der an seinem Objekt keinerlei Veränderung hervorbringt. Für $n = -m$ ist nach (2) und (4) ferner

$$\Omega^m \Omega^{-m} = 1, \tag{5}$$

also

$$\Omega^{-m} = \frac{1}{\Omega^m}. \tag{6}$$

Das Symbol Ω^{-m} stellt demnach die zu Ω^m inverse oder reziproke Operation dar, welche die Wirkung der Operation Ω^m wieder rückgängig macht. Da nun Ω ein Differentiationssymbol ist, so müssen die Elemente der inversen Operation Ω^{-1} die entsprechenden Integrationen darstellen. Diese Integraldarstellung des inversen Operators ergibt sich aus einer Reihenentwicklung. Wir setzen zu dem Zweck

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ und } \beta_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

Dann ist

$$\Omega_{xy} = \Omega = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \tag{8}$$

also

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{9}$$

oder

$$\Omega^{-1} = \Omega_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2\left(1 - \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\right)}. \tag{10}$$

Entwickelt man nun (10) in eine unendliche Potenzreihe, so folgt

$$\Omega_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\beta_1^2}{\alpha_1^3\beta_2^3} + \dots . \tag{11}$$

Hierin hat man mit Rücksicht auf (7) zu setzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha_i} = \alpha_i^{-1} = \int_{(x_i)}, \qquad \frac{1}{\beta_i} = \beta_i^{-1} = \int_{(y_i)}, \\
&\frac{1}{\alpha_i^2} = \alpha_i^{-2} = \iint_{(x_i)}, \qquad \frac{1}{\beta_i^2} = \beta_i^{-2} = \iint_{(y_i)}, \\
&\qquad - - -

und Integrieren. Bei der wirklichen Durchführung der inversen Operation ist es aber nicht nötig, die Reihenentwicklung des Operators (11) bis ins Unendliche fortzusetzen, wo dann erst noch die Frage nach der Konvergenz des Verfahrens aufzuwerfen wäre; vielmehr wird in jedem einzelnen Falle die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen. In der Entwicklung treten nämlich bald höhere Differentiationssymbole auf, als die Ordnung der Form beträgt, auf die der Operator wirkt. Diese und alle folgenden Glieder können daher gestrichen werden. Bildet man jetzt das Produkt aus Ω mit dem so gekürzten Ausdruck Ω^{-1}, so erhält man zwar nicht genau 1, sondern es fehlen noch Differentiationssymbole, die aber von so hoher Ordnung sind, daß sie Null ergeben und fortgelassen werden können.

Der Operator Ω^{-1} gestattet aber noch eine zweite Reihenentwicklung, wenn man setzt

$$\Omega^{-1} = \Omega_2^{-1} = -\frac{1}{\alpha_2\beta_1\left(1 - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\right)}. \tag{13}$$

Man erhält alsdann

$$\Omega_2^{-1} = -\frac{1}{\alpha_2\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2\beta_1^2} - \frac{\alpha_1^2\beta_2^2}{\alpha_2^3\beta_1^3} - \cdots. \tag{14}$$

Auch diese Reihenentwicklung ermöglicht die Ausführung der inversen Operation durch gliedweises Differenzieren und Integrieren, wobei wiederum die Reihe in jedem einzelnen Falle mit dem Gliede abbricht, in dem die Ordnung der Differentiation gleich der Ordnung der Form ist, auf welche der Operator wirkt.

Die Entwicklungen (11) und (14) sind übrigens nicht einander gleichwertig, sondern stehen gewissermaßen in einem komplementären Verhältnis zueinander, insofern als in (11) nach den Variabeln x_2 und y_1 nur differenziert und nach x_1 und y_2 nur integriert wird, während umgekehrt in (14) nach x_2 und y_1 nur integriert und nach x_1 und y_2 nur differenziert wird. Dementsprechend erhält man bei An-

wendung beider Entwicklungen (11) und (14) auf einen und denselben Ausdruck zwei verschiedene Formen, welche ebenfalls, wie wir später sehen werden, ein gewisses komplementäres Verhalten zeigen.

Wie für die in (11) und (14) definierte inverse Operation Ω^{-1}, so läßt sich in entsprechender Weise auch für jede beliebige Potenz Ω^{-n} eine Reihenentwicklung angeben. Man erhält z. B. für $n = 2$ die beiden Entwicklungen

$$\Omega_1^{-2} = \frac{1}{(a_1\beta_2 - a_2\beta_1)^2} = \frac{1}{a_1^2\beta_2^2\left(1 - \frac{a_2\beta_1}{a_1\beta_2}\right)^2} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{a_1^2\beta_2^2} + 2\frac{a_2\beta_1}{a_1^3\beta_2^3} + 3\frac{a_2^2\beta_1^2}{a_1^4\beta_2^4} + \cdots$$

und

$$\Omega_2^{-2} = \frac{1}{a_2^2\beta_1^2\left(1 - \frac{a_1\beta_2}{a_2\beta_1}\right)^2} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{a_2^2\beta_1^2} + 2\frac{a_1\beta_2}{a_2^3\beta_1^3} + 3\frac{a_1^2\beta_2^2}{a_2^4\beta_1^4} + \cdots$$

usw.

Läßt man endlich auch noch mehr als zwei Reihen Veränderliche

$$x_1|x_2,\ y_1|y_2,\ z_1|z_2,\ \ldots,\ u_1|u_2,\ v_1|v_2 \tag{17}$$

zu, so hat man zur Ausführung der inversen Operation von der Form

$$\Omega_{xy}^{-m}\,\Omega_{xz}^{-n}\ldots\Omega_{xv}^{-p}\,\Omega_{yz}^{-q}\ldots\Omega_{uv}^{-r} \tag{18}$$

jedes einzelne Grundsymbol vom Typus Ω_{xy}^{-m} für sich in eine Reihe zu entwickeln und die erhaltenen Entwicklungen miteinander zu multiplizieren.

Da nun, wie wir gesehen haben, der Ω-Prozeß selbst uns zu einer gegebenen Form die zugehörigen Kovarianten schafft, so wird man erwarten dürfen, durch Anwendung der inversen Operation von einer gegebenen Ko-

variante zur Ausgangsform zurückzugelangen. Es seien z. B.

$$A(x_1|x_2),\ B(x_1|x_2) \tag{19}$$

zwei Grundformen, so ist

$$C(x_1|x_2,\ y_1|y_2) = \Omega_{xy}\, A(x_1|x_2)\, B(y_1|y_2) \tag{20}$$

eine ihrer Kovarianten in Cayleyscher Symbolik. Die Form C ist zunächst nur eine Doppelform, d. h. eine Form von 2 Reihen Veränderliche, welche in die gesuchte Kovariante von (19) erst übergeht, wenn man in ihr nach erfolgter Ausrechnung $x_i \equiv y_i$ setzt. Solche Übergangsformen zu Kovarianten einer Variabelnreihe wollen wir in Zukunft im Interesse einer bequemeren Ausdrucksweise als polarisierte Kovarianten bezeichnen.

Wendet man nun auf (20) die Reihenentwicklung (11) des Operators Ω^{-1} an, so möge

$$\Phi_1(x_1|x_2,\ y_1|y_2) = \Omega_1^{-1}\, C(x_1|x_2,\ y_1|y_2) \tag{21}$$

entstehen und bei Anwendung der Entwicklung (14)

$$\Phi_2(x_1|x_2,\ y_1|y_2) = \Omega_2^{-1}\, C(x_1|x_2,\ y_1|y_2). \tag{22}$$

Die so erhaltenen Doppelformen Φ_1 und Φ_2 haben alsdann die gleiche polarisierte Kovariante (20) wie das Produkt der Ausgangsformen (19) selbst. Denn es ist

$$\begin{aligned} \Omega\, \Phi_1 &= \Omega\, \Omega_1^{-1}\, C = C, \\ \Omega\, \Phi_2 &= \Omega\, \Omega_2^{-1}\, C = C. \end{aligned} \tag{23}$$

Aus (1) folgt weiter, daß die Formen Φ_1 und Φ_2 ein ganzes Büschel $\varkappa\, \Phi_1 + \lambda\, \Phi_2$ von der Eigenschaft bestimmen, daß für $\varkappa + \lambda = 1$ alle in dem Büschel enthaltenen Formen den Ausdruck (20) zur vorgeschriebenen Kovariante besitzen. Denn für $\varkappa + \lambda = 1$ ist

$$\begin{aligned} \Omega\, (\varkappa\, \Phi_1 + \lambda \Phi_2) &= \varkappa\, \Omega\, \Phi_1 + \lambda\, \Omega\, \Phi_2 \\ &= (\varkappa + \lambda)\, C \\ &= C. \end{aligned} \tag{24}$$

Dieses Büschel stellt aber offenbar noch nicht den allgemeinsten Ausdruck dar, der die Gesamtheit aller Formen mit vorgeschriebener polarisierter Kovariante (20) enthält. Denn wie jede Integration nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, die bei Ausführung der Differentiation verschwindet, so ist auch die zu Ω inverse Operation Ω^{-1} nur bis auf einen additiven Term bestimmt, der unter Wirkung von Ω verschwindet. Bezeichnen wir diesen Term, der offenbar eine Doppelform sein wird, kurz mit Φ_0, so muß

$$\Omega \Phi_0 \equiv 0 \tag{25}$$

sein. Verstehen wir unter Φ_0 zugleich auch die allgemeinste Lösung der Gleichung (25), so läßt sich leicht nachweisen, daß der Ausdruck

$$\Phi = \Phi_0 + \varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2 \tag{26}$$

für $\varkappa + \lambda = 1$ die allgemeinste Lösung von

$$\Omega \Phi = C \tag{27}$$

ist, d. h. daß der Ausdruck (26) die Gesamtheit aller Formen mit vorgegebener Kovariante (20) darstellt. Denn sind Ψ_1 und Ψ_2 irgend zwei Lösungen von (27), so ist $\Omega(\Psi_1 - \Psi_2) = 0$, also Ψ_2 von der Form

$$\Psi_2 = \Psi_1 + (\Psi_2 - \Psi_1), \tag{28}$$

wobei $\Psi_2 - \Psi_1$ eine Form ist, die der Bedingung (25) genügt. Hieraus folgt, daß die allgemeinste Lösung Ψ_2 von (27) aus irgendeiner speziellen Lösung Ψ_1 und aus der allgemeinsten Lösung von $\Omega \Phi_0 \equiv 0$ additiv zusammengesetzt werden kann. Als spezielle Lösung Ψ_1 nehmen wir das Büschel $\Psi_1 = \varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2$ für $\varkappa + \lambda = 1$. Die so erhaltene allgemeinste Lösung Φ (26) von $\Omega \Phi = C$ muß also insbesondere das Produkt der Ausgangsformen (19) selbst enthalten. Der Schwerpunkt des Rekonstruktionsverfahrens liegt also, wie man sieht, in der Bestimmung des Gliedes Φ_0, das unter der Wirkung des Ω-Prozesses verschwindet. Unter den Formen Φ_0 werden sich offenbar die Hilbertschen

Nullformen[1]) befinden, die gar keine Invarianten besitzen, also bei jeder Operation Ω verschwinden. Doch sind im allgemeinen die Formen Φ_0 keine Nullformen. Im folgenden Paragraphen werden wir ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung des Zusatzgliedes Φ_0 angeben.

Der geschilderte Algorithmus läßt sich offenbar verallgemeinern. Ist z. B. die vorgeschriebene Kovariante C nach der Vorschrift

$$C = \Omega^n A \cdot B \tag{29}$$

entstanden, so hat man zu setzen

$$\Omega^{-n} = \frac{1}{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^n}. \tag{30}$$

Der Ausdruck (30) gestattet wieder 2 Reihenentwicklungen Ω_1^{-n} und Ω_2^{-n}, welche auf C angewandt abermals ein Büschel $\varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2$ für $\varkappa + \lambda = 1$ liefern, dessen Formen die gleiche polarisierte Kovariante (29) besitzen wie das Produkt der Ausgangsformen A und B. Fügt man dann diesem Büschel die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$\Omega^n \Phi_0 = 0 \tag{31}$$

hinzu, so ist die entstehende Form

$$\Phi = \Phi_0 + \varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1) \tag{32}$$

der allgemeinste Ausdruck von der Eigenschaft

$$\Omega^n \Phi = C. \tag{33}$$

Insbesondere muß die Form (32) das Produkt A·B der Urformen selbst enthalten. Ganz Entsprechendes gilt auch für den Fall, daß die polarisierte Kovariante C noch mehr als zwei Reihen Veränderliche enthält, worauf wir aber nicht näher einzugehen brauchen, da sich hierbei nichts Neues ergibt.

Im vorangehenden haben wir bisher vorausgesetzt, daß der Ω-Prozeß auf ein Produkt von wenigstens zwei Formen

---

[1]) Math. Annalen, Bd. 42: Über die vollen Invariantensysteme.

A und B angewandt werde, von denen jede nur eine einzige Reihe Veränderliche besitzt. Als Resultat der Operation ergab sich dann in jedem Falle eine polarisierte Kovariante, die für sich genommen eine einzige Form mit wenigstens zwei Reihen Veränderliche darstellt. Es liegt nun nichts im Wege, den Ω-Prozeß von vornherein auf eine einzige Grundform von mindestens zwei Variabelnreihen anzuwenden, welche aber nicht wie bisher in ein Produkt zu zerfallen braucht, worin jeder Faktor nur eine Reihe Veränderliche enthält. In letzterem Falle würde die Ausführung des Ω-Prozesses Formen liefern, welche als Kovarianten einer einzigen Grundform mit mehreren Variabelnreihen anzusehen wären, unter der Bedingung, das sämtliche Reihen Veränderliche als untereinander kogredient aufgefaßt werden. Geht man aber, wie oben angenommen, von dem Produkt von z. B. zwei Formen A und B aus, von denen jede ein anderes Variabelnpaar enthält, und bildet die Kovariante $C = \Omega^n A \cdot B$, so liefert die Operation $\Phi = \Omega^{-n} C$ eine Funktion Φ von der Form (26), die jedoch nicht ohne weiteres in ein Produkt zerfällt derart, daß jeder Faktor nur eine Variabelnreihe besitzt. Zur vollständigen Rekonstruierung der Urformen A und B ist es also erforderlich, die Bedingungen anzugeben, unter denen die gefundene Form Φ in ein Produkt von der angegebenen Beschaffenheit zerfällt. Die Ermittlung dieser Bedingungen bildet jedoch eine Untersuchung für sich, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll. Das Beispiel der Zerfällung einer bilinearen Form zeigt, daß die Bedingungen im allgemeinen nicht einfacher Natur sind.

§ 7.

Der Zusatzterm.

In § 6 sind wir von einer polarisierten Kovariante $C(x|y)$ zweier Binärformen $A(x_1|x_2)$ und $B(y_1|y_2)$ ausgegangen und

haben aus ihr zwei Funktionen $\Phi_1(x|y)$ und $\Phi_2(x|y)$ als spezielle Lösungen der Differentialgleichung

$$\Omega^n \Phi(x|y) = C(x|y) \tag{1}$$

abgeleitet. Es war dann $\varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2$ für $\varkappa + \lambda = 1$ ebenfalls eine Lösung von (1), und nach bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ließ sich zeigen, daß die allgemeinste Lösung von (1) durch den Ausdruck

$$\Phi = \Phi_0 + \varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1) \tag{2}$$

dargestellt wird, wenn Φ_0 die allgemeinste Lösung von

$$\Omega^n \Phi_0 = 0 \tag{3}$$

bedeutet. Zur Bestimmung dieses Zusatzgliedes Φ_0 genügt es, daß wir den Fall der polarisierten Funktionaldeterminante von A und B eingehender behandeln, woraus, wie wir sehen werden, sich alle übrigen Fälle von selbst ergeben. Es ist vielleicht von Interesse, an dieser Stelle eine kurze Zwischenuntersuchung einzuschalten und vorerst nach der Beschaffenheit zweier Binärformen zu fragen, deren wirkliche Funktionaldeterminante identisch verschwindet. Obwohl wir hieraus für unseren Spezialfall keinen Nutzen ziehen werden, so dürfte diese Nebenuntersuchung doch nicht überflüssig sein, da die Frage in der Literatur[1]) nicht in voller Allgemeinheit beantwortet zu sein scheint.

Sind $A(x_1|x_2)$ und $B(x_1|x_2)$ irgend zwei Binärformen, so lautet ihre Funktionaldeterminante

$$J(x_1|x_2) = \frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial B}{\partial x_2} - \frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{\partial B}{\partial x_1}. \tag{4}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle: A und B von gleicher Ordnung und A und B von ungleicher Ordnung.

I. A und B von der gleichen Ordnung n.

Wir setzen

$$f(x_1|x_2) = \frac{A(x_1|x_2)}{B(x_1|x_2)}. \tag{5}$$

---

[1]) vgl. auch Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. I, Nr. 121; Faà di Bruno-Walter, Einleitung in die Theorie der binären Formen, S. 79.

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{B\frac{\partial A}{\partial x_1} - A\frac{\partial B}{\partial x_1}}{B^2},$$

(6)

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{B\frac{\partial A}{\partial x_2} - A\frac{\partial B}{\partial x_2}}{B^2}.$$

Multipliziert man beide Gleichungen (6) bezw. mit y_1 und y_2 und addiert, so folgt

$$(7) \qquad B^2\left[y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = y_1\begin{vmatrix} B & \frac{\partial B}{\partial x_1} \\ A & \frac{\partial A}{\partial x_1} \end{vmatrix} + y_2\begin{vmatrix} B & \frac{\partial B}{\partial x_2} \\ A & \frac{\partial A}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

und mit Rücksicht auf das Eulersche Theorem homogener Funktionen

$$(8)\ nB^2\left[y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = \begin{vmatrix} x_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial B}{\partial x_2}, & y_1\frac{\partial B}{\partial x_1} \\ x_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A}{\partial x_2}, & y_1\frac{\partial A}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial B}{\partial x_2}, & y_2\frac{\partial B}{\partial x_2} \\ x_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A}{\partial x_2}, & y_2\frac{\partial A}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial B}{\partial x_2}, & y_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial B}{\partial x_2} \\ x_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial A}{\partial x_2}, & y_1\frac{\partial A}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial A}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Oder endlich

$$(9)\ nB^2\left[y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial x_1} & \frac{\partial B}{\partial x_2} \\ \frac{\partial A}{\partial x_1} & \frac{\partial A}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

und wegen (4)

$$(10) \qquad n B^2 \left[y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = - (x\,y)\,J.$$

Ist also $J = 0$, so wird

$$(11) \qquad y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0;$$

und hieraus folgt, da y_1 und y_2 willkürlich sind,

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

d. h. $f(x_1|x_2) =$ const. nach x_1 und x_2. Setzen wir diese Konstante gleich $\varkappa$, so folgt aus (5)

$$(13) \qquad A = \varkappa B.$$

Ist umgekehrt $A = \varkappa B$, wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet, so wird

$$(14) \qquad J = \varkappa \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 B}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 .$$

Daher gilt der Satz:

Das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante zweier Binärformen A und B gleicher Ordnung ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß A und B sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

II. A und B von ungleicher Ordnung.

Es sei A von der Ordnung m und B von der Ordnung n. Wir setzen dann $p = am = bn$, wo a und b zwei passend gewählte ganze Zahlen sind, so daß p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m und n ist. Jetzt sind

$$(15) \qquad P = A^a \text{ und } Q = B^b$$

zwei Formen von der gleichen Ordnung p. Wir bilden nun die erste Überschiebung der Funktion P über Q

$$(16) \qquad \begin{aligned} [P, Q]_1 &= [A^a, B^b]_1 = A^{a-1} Q^{b-1} [A, B]_1 \\ &= \frac{A^{a-1} Q^{b-1}}{m \cdot n} J , \end{aligned}$$

wo J die Funktionaldeterminante (4) bedeutet. Ist nun $J = 0$, so muß auch $[P, Q]_1 = 0$ sein; letzteres ist aber nur dann der Fall, wenn

$$P = \varkappa Q \tag{17}$$

oder

$$A^a = \varkappa B^b \tag{18}$$

ist, wo $\varkappa$ eine beliebige Konstante bedeutet. Sind umgekehrt A und B von bezw. den Ordnungen m und n, und lassen sich zwei ganze Zahlen a und b derart finden, daß A^a und B^b von gleicher Ordnung und außerdem einander proportional werden, so ist

$$[A^a, B^b]_1 = A^{a-1} B^{b-1} [A, B]_1 = \frac{A^{a-1} B^{b-1}}{m \cdot n} J = 0 \tag{19}$$

und damit J selbst Null. Um den Satz besser formulieren zu können, geben wir der Bedingung (18) eine andere Gestalt. Es sei der Linearteiler L_i in B genau ν_i mal enthalten; dann muß L_i wegen (18) auch in A enthalten sein, er möge in A genau μ_i mal vorkommen. Da nun aber L_i auf beiden Seiten von (18) gleich oft vorkommen muß, so folgt

$$a \mu_i = b \nu_i . \tag{20}$$

Anderseits ist aber auch

$$a m = b n , \tag{21}$$

also

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu_i}{\nu_i} . \tag{22}$$

Ist nun

$$\begin{aligned} A &= \varkappa_1 L_1^{\mu_1} \cdot L_2^{\mu_2} \cdot L_3^{\mu_3} \ldots L_s^{\mu_s} , \\ B &= \varkappa_2 L_1^{\nu_1} \cdot L_2^{\nu_2} \cdot L_3^{\nu_3} \ldots L_s^{\nu_s} , \end{aligned} \tag{23}$$

so sagt (22) aus, daß alle μ und ν die Form haben

$$\begin{aligned} \mu_i &= r_i h , \\ \nu_i &= r_i k \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{24}$$

bei ganzzahligen r_i, h und k. Also wird

$$\begin{aligned} A &= \varkappa_1 \left(L_1^{r_1} \cdot L_2^{r_2} \cdot L_3^{r_3} \ldots L_s^{r_s} \right)^h \\ B &= \varkappa_2 \left(L_1^{r_1} \cdot L_2^{r_2} \cdot L_3^{r_3} \ldots L_s^{r_s} \right)^k , \end{aligned} \tag{25}$$

d. h. A und B sind, von einem konstanten Faktor abgesehen, Potenzen einer und derselben Form. Die Gleichungen (25) schließen, wie man sieht, den vorhergehenden Fall, daß A und B von gleicher Ordnung sind, ein, so daß man allgemein sagen kann:

Das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante zweier Binärformen A und B ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß A und B bis auf konstante Faktoren Potenzen einer und derselben dritten Form sind.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für das identische Verschwinden der polarisierten Funktionaldeterminante zweier Formen A und B, und damit kehren wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück. Es seien in leicht verständlicher Abkürzung

$$(26)\qquad \begin{aligned} A(x_1|x_2) &= (a_0a_1a_2\ldots a_m\,x_1|x_2) = (a_0a_1a_2\ldots a_m),\\ B(y_1|y_2) &= (b_0b_1b_2\ldots b_n\,y_1|y_2) = (b_0b_1b_2\ldots b_n)\end{aligned}$$

zwei Grundformen von den Ordnungen m und n, welche außer den Koeffizienten a_μ bezw. b_μ noch die entsprechenden Binomialkoeffizienten enthalten mögen. Die polarisierte Funktionaldeterminante von (26) lautet:

$$(27)\qquad J(x|y) = \Omega A\cdot B = \frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial B}{\partial y_2} - \frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{\partial B}{\partial y_1}.$$

Ist nun $J(x|y) = 0$, so muß

$$(28)\qquad \frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial B}{\partial y_2} = \frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{\partial B}{\partial y_1}$$

sein. Hieraus folgt, da die rechte wie die linke Seite von (28) den Faktor $\frac{\partial A}{\partial x_1}$ enthalten muß,

$$(29)\qquad \frac{\partial A}{\partial x_2} = \varkappa\frac{\partial A}{\partial x_1},$$

und daher auch

$$(30)\qquad \frac{\partial B}{\partial y_2} = \varkappa\frac{\partial B}{\partial y_1},$$

wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Nun ist aber

$$(31)\quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_1} &= m(a_0 a_1 a_2 \dots a_{m-1}),\\ \frac{\partial A}{\partial x_2} &= m(a_1 a_2 a_3 \dots a_m),\\ \frac{\partial B}{\partial y_1} &= n(b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}),\\ \frac{\partial B}{\partial y_2} &= n(b_1 b_2 b_3 \dots b_n); \end{aligned}$$

also folgt wegen (29) und (30)

$$(32)\quad \begin{array}{l|l} a_1 = \varkappa a_0, & b_1 = \varkappa b_0,\\ a_2 = \varkappa a_1, & b_2 = \varkappa b_1,\\ a_3 = \varkappa a_2, & b_3 = \varkappa b_2,\\ \text{— — — —} & \text{— — — —}\\ a_m = \varkappa a_{m-1}, & b_n = \varkappa b_{n-1}, \end{array}$$

oder

$$(33)\quad \begin{array}{l|l} a_1 = \varkappa\ a_0, & b_1 = \varkappa\ b_0,\\ a_2 = \varkappa^2 a_0, & b_2 = \varkappa^2 b_0,\\ a_3 = \varkappa^3 a_0, & b_3 = \varkappa^3 b_0,\\ \text{— — — —} & \text{— — — —}\\ a_m = \varkappa^m a_0, & b_n = \varkappa^n b_0. \end{array}$$

Somit ergibt sich schließlich

$$(34)\quad \begin{aligned} A(x_1|x_2) &= a_0(1 \varkappa \varkappa^2 \varkappa^3 \dots \varkappa^m)(x_1|x_2) = a_0(x_1 + \varkappa x_2)^m,\\ B(y_1|y_2) &= b_0(1 \varkappa \varkappa^2 \varkappa^3 \dots \varkappa^n)(y_1|y_2) = b_0(y_1 + \varkappa y_2)^n, \end{aligned}$$

d. h. A und B sind reine Potenzen einer und derselben Linearform in den ihnen entsprechenden Variabeln. Wenn umgekehrt die Gleichungen (34) bestehen, so zeigt eine einfache Rechnung, daß $J(x|y) = 0$ ist. Daher gilt der Satz:

Das identische Verschwinden der polarisierten Funktionaldeterminante $J(x|y) = \dfrac{\partial A}{\partial x_1}\dfrac{\partial B}{\partial y_2} - \dfrac{\partial A}{\partial x_2}\dfrac{\partial B}{\partial y_1}$ zweier Binärformen $A(x_1|x_2)$ und $B(y_1|y_2)$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß A und B bis auf konstante Faktoren Potenzen

einer und derselben Linearform in den ihnen entsprechenden Variabeln sind.

Bildet man also Ausdrücke von der Form

$$\Theta_i = (x_1 + p_i x_2)^m (y_1 + p_i y_2)^n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

mit konstanten Parametern p_i, so stellt jede dieser Funktionen (35) zugleich eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$\Omega \Phi_0 = 0 \tag{36}$$

dar, und aus dem distributiven Gesetz, dem der Operator Ω gehorcht, folgt dann weiter, daß bei konstanten u_i auch jede Summe

$$\Phi_0 = u_1 \Theta_1 + u_2 \Theta_2 + u_3 \Theta_3 + \cdots + u_r \Theta_r \tag{37}$$

aus mehreren solcher Ausdrücke (35) ebenfalls eine Lösung von (36) ist. Die Funktion (37) ist aber, wie leicht ersichtlich, die n^{te} Polare einer Form $(m+n)^{ter}$ Ordnung

$$f(x_1|x_2) = \tag{38}$$

$$u_1(x_1 + p_1 x_2)^{m+n} + u_2(x_1 + p_2 x_2)^{m+n} + \cdots + u_r(x_1 + p_r x_2)^{m+n},$$

und es läßt sich leicht nachweisen,[1]) daß überhaupt jede in x und y ganze rationale Lösung von (36) eine Polare darstellt. Da nun auch umgekehrt jede Polare einer Binärform der Gleichung (36) genügt, so ist die in x und y ganze rationale und allgemeinste Lösung Φ_0 von (36) stets eine Polare einer Grundform $f(x_1|x_2)$. Hierbei ist der Polarenbegriff so zu fassen, daß die Grundform f selbst als „nullte“ Polare mitzählt.

Damit ist das Zusatzglied für den Fall der Rekonstruktion der Urformen aus einer vorgeschriebenen Funktionaldeterminante vollständig bestimmt. Man hat also dem durch die inverse Operation Ω^{-1} gewonnenen Büschel $\varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2$ noch das Glied

$$\Phi_0 = \Pi \tag{39}$$

zuzufügen, wo Π eine mit allgemeinen Koeffi-

[1]) vgl. Gordan-Kerschensteiner, „Vorlesungen über Invariantentheorie“, Bd. 2, Nr. 19.

zienten angesetzte Polare bedeutet, deren Ordnung in den x und y so gewählt ist, daß die Homogenität des entstehenden Ausdrucks

(40) $$\Phi = \Phi_0 + \varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1)$$

gewahrt bleibt.

Hieraus läßt sich nun sofort ein Algorithmus ableiten zur Bestimmung der allgemeinsten Lösung der Differentialgleichung

(41) $$\Omega^n \Phi_0 = 0.$$

Zu dem Zweck nehmen wir an, es sei die allgemeinste Lösung $\Phi_0 = \mathrm{f}$ von (41) bereits gefunden. Dann ist also

(42) $$\Omega^n \mathrm{f} = \Omega[\Omega^{n-1}\mathrm{f}] = 0.$$

Hieraus folgt, daß

(43) $$\Omega^{n-1}\mathrm{f} = \Pi_1$$

eine Polare ist. Von dieser Gleichung (43) lassen sich aber mit Hilfe des Umkehrungsalgorithmus des Ω-Prozesses zwei spezielle Lösungen angeben, nämlich

(44) $$\begin{aligned} \mathrm{f}_{11} &= \Omega_1^{-(n-1)} \Pi_1, \\ \mathrm{f}_{12} &= \Omega_2^{-(n-1)} \Pi_1. \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen f_{11} und f_{12} von (43) setzen sich additiv zu einer dritten Lösung zusammen

(45) $$\mathrm{f}_1 = \varkappa_1 \mathrm{f}_{11} + \lambda_1 \mathrm{f}_{12} \qquad \text{für } \varkappa_1 + \lambda_1 = 1.$$

Daher ist auch

(46) $$\Omega^{n-1}\mathrm{f}_1 = \Pi_1.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (43) und (46) ergibt sich dann

(47) $$\Omega^{n-1}(\mathrm{f} - \mathrm{f}_1) = 0.$$

Hieraus folgt abermals, daß

(48) $$\Omega^{n-2}(\mathrm{f} - \mathrm{f}_1) = \Pi_2$$

eine Polare ist. Löst man wieder die Gleichung (48) durch Ausführung der inversen Operation $\Omega^{-(n-2)}$ auf, so ergeben sich 2 Lösungen

(49) $$\begin{aligned} \mathrm{f}_{21} &= \Omega_1^{-(n-2)} \Pi_2, \\ \mathrm{f}_{22} &= \Omega_2^{-(n-2)} \Pi_2, \end{aligned}$$

aus denen sich eine dritte Lösung linear zusammensetzt

(50) $$f_2 = \varkappa_2 f_{21} + \lambda_2 f_{22} \text{ für } \varkappa_2 + \lambda_2 = 1.$$

Es ist daher auch

(51) $$\Omega^{n-2} f_2 = \Pi_2,$$

und durch Subtraktion der Gleichungen (48) und (51) folgt dann weiter

(52) $$\Omega^{n-2}(f - f_1 - f_2) = 0,$$

d. h. aber

(53) $$\Omega^{n-3}(f - f_1 - f_2) = \Pi_3$$

eine Polare usw. Setzt man das Schlußverfahren in der angedeuteten Weise fort, so folgt allgemein, daß der Ausdruck

(54) $$\Omega^{n-\nu}(f - f_1 - f_2 - \cdots - f_{\nu-1}) = \Pi_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

stets eine Polare ist, wobei

(55) $$f_\nu = \varkappa_\nu f_{\nu 1} + \lambda_\nu f_{\nu 2} \qquad (\varkappa_\nu + \lambda_\nu = 1)$$

gesetzt ist und die Funktionen $f_{\nu 1}$ und $f_{\nu 2}$ nach der Umkehrung des Ω-Prozesses

(56) $$f_{\nu 1} = \Omega_1^{-(n-\nu)} \Pi_\nu,$$
$$f_{\nu 2} = \Omega_2^{-(n-\nu)} \Pi_\nu$$

als spezielle Lösungen der Gleichung

(57) $$\Omega^{n-\nu} f_\nu = \Pi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots.)$$

gebildet sind. Insbesondere folgt für $\nu = n$ aus (54), daß

(58) $$f - f_1 - f_2 - \cdots - f_{n-1} = \Pi_n$$

eine Polare ist. Setzt man hierin, um Gleichmäßigkeit in der Bezeichnung zu erzielen, $\Pi_n = f_n$, so folgt

(59) $$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n.$$

Die allgemeinste Lösung $\Phi_0 = f$ von $\Omega^n \Phi_0 = 0$ kann also, wie man sieht, aus speziellen Lösungen f_ν der Gleichungen (57) mittels des Umkehrungsalgorithmus des Ω-Prozesses linear zusammengesetzt werden. Hierbei würde natürlich schon genügen, in (55) $\varkappa_\nu = 1$ und $\lambda_\nu = 0$ zu setzen, d. h. mit anderen Worten anstatt f_ν die Lösungen $f_{\nu 1}$ oder auch $f_{\nu 2}$ allein zu benutzen, doch gestattet der volle Ausdruck

f_ν die spezielle Lösung von (57) der allgemeinen besser anzunähern. Somit ergibt sich der Satz:

Die allgemeinste Lösung $\Phi_0 = f$ von $\Omega^n \Phi_0 = 0$ wird in der Form

(60) $$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

erhalten, indem man n Polaren $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_n$ mit allgemeinen Koeffizienten, jedoch unter Wahrung der Homogenität in den x und y, annimmt und aus ihnen gemäß (55) und (56) die Funktionen f_ν als Lösungen der Gleichungen $\Omega^{n-\nu} f_\nu = \Pi_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ bestimmt.

Das Verfahren läßt sich offenbar verallgemeinern. Ist z. B. eine polarisierte Kovariante von noch mehr als zwei Reihen Veränderliche gegeben, etwa

(61) $$K(x|y|z) = \Omega_{xy}^m \Omega_{xz}^n A(x_1|x_2)\, B(y_1|y_2)\, C(z_1|z_2),$$

so setzen wir zur Abkürzung

(62) $$\Psi^{m,n} = \Omega_{xy}^m \Omega_{xz}^n.$$

Ist dann $\Phi_0 = f$ die allgemeinste Lösung der Gleichung

(63) $$\Psi^{m,n} \Phi_0 = 0,$$

so folgt

(64) $$\Psi^{m,n} f = \Omega_{xy}[\Psi^{m-1,n} f] = 0,$$

d. h. aber

(65) $$\Psi^{m-1,n} f = \Pi_1,$$

wo Π_1 eine Polare nach x in bezug auf y ist. Leitet man nun mit Hilfe der zu (62) inversen Operation

(66) $$\Psi^{-m,-n} = \Omega_{xy}^{-m}\ \Omega_{xz}^{-n}$$

eine spezielle Lösung

(67) $$f_1 = \Psi^{-(m-1),-n} \Pi_1$$

von (65) ab, so ist auch

(68) $$\Psi^{m-1,n} f_1 = \Pi_1.$$

Durch Subtraktion folgt dann aus (65) und (68)

(69) $$\Psi^{m-1,n}(f - f_1) = 0,$$

d. h. aber

$$\Psi^{m-2,n}(f-f_1) = \Pi_2 \tag{70}$$

ist abermals eine Polare nach x in bezug auf y usw. Man sieht ohne weiteres ein, daß sich hier das Schlußverfahren des vorhergehenden Beispieles wiederholt, so daß wir sofort das Resultat angeben können:

Bilden wir m + n Formen $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m, \Pi_{m+1}, \ldots, \Pi_{m+n}$ mit allgemeinen Koeffizienten, aber unter Wahrung der Homogenität in den x, y, z derart, daß die ersten m Formen $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ zugleich Polaren nach x in bezug auf y und die letzten n Formen $\Pi_{m+1}, \ldots, \Pi_{m+n}$ Polaren nach x in bezug auf z sind, so lassen sich mit Hilfe des zu (62) inversen Operators $\Psi^{-m,-n}$ im ganzen m + n Formen $f_1, f_2, \ldots, f_{m+n}$ als spezielle Lösungen der Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\Psi^{m-1,n} f_1 &= \Pi_1 , \\
\Psi^{m-2,n} f_2 &= \Pi_2 , \\
&\text{— — — — — — ,} \\
\Psi^{0,n} f_m &= \Pi_m , \\
\Psi^{0,n-1} f_{m+1} &= \Pi_{m+1} , \\
&\text{— — — — — — — ,} \\
\Psi^{0,0} f_{m+n} &= \Pi_{m+n} .
\end{aligned} \tag{71}$$

Die allgemeinste Lösung $\Phi_0 = f$ von $\Psi^{m,n}\Phi_0 = 0$ stellt sich alsdann dar als Summe

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{m+n} \tag{72}$$

der durch (71) bestimmten speziellen Lösungen.

III. Spezielle Durchführung.

§ 8.

Anwendung auf die Jakobische Kovariante. (Funktionaldeterminante.)

Wir kommen nun zur spezielleren Erläuterung des dargelegten Algorithmus an Hand einiger Beispiele. Sind $f(x_1|x_2)$ und $g(y_1|y_2)$ zwei Grundformen n^{ter} Ordnung

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x_1|x_2) &= \sum_0^n \binom{n}{\nu} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu, \\ g(y_1|y_2) &= \sum_0^n \binom{n}{\nu} b_\nu y_1^{n-\nu} y_2^\nu, \end{aligned}$$

die also außer den Koeffizienten a_ν und b_ν noch die entsprechenden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\nu}$ enthalten, so setzen wir kurz

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(x_1|x_2) &= (a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \text{ X } x_1|x_2), \\ g(y_1|y_2) &= (b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_n \text{ X } y_1|y_2) \end{aligned}$$

oder unter der Voraussetzung, daß f stets die Variabeln $x_1|x_2$ und g die Variabeln $y_1|y_2$ enthalten soll,

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(x_1|x_2) &= (a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n), \\ g(y_1|y_2) &= (b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_n). \end{aligned}$$

I. Beispiel: Funktionaldeterminante zweier quadratischen Formen.

Es sei

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(x_1|x_2) &= (a_0\, a_1\, a_2), \\ g(y_1|y_2) &= (b_0\, b_1\, b_2). \end{aligned}$$

Dann ist

$$(5) \qquad J(x|y) = \Omega f \cdot g = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) f \cdot g$$

die polarisierte Funktionaldeterminante von (4), wenn

$$(6) \qquad \alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2)$$

bedeuten. Aus (5) folgt

$$(7) \qquad J(x|y) = \begin{vmatrix} \alpha_1 f & \alpha_2 f \\ \beta_1 g & \beta_2 g \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} (a_0 a_1) & (a_1 a_2) \\ (b_0 b_1) & (b_1 b_2) \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$(8) \qquad \begin{aligned} J(x|y) &= 4 [x_1 (A_0 y_1 + A_1 y_2) + x_2 (B_0 y_1 + B_1 y_2)] \\ &= 4 [x_1 (A_0 A_1) + x_2 (B_0 B_1)], \end{aligned}$$

wo

$$(9) \qquad \begin{aligned} A_0 &= a_0 b_1 - a_1 b_0, \\ A_1 &= a_0 b_2 - a_1 b_1, \end{aligned} \quad \begin{aligned} B_0 &= a_1 b_1 - a_2 b_0, \\ B_1 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Nun fassen wir umgekehrt die Kovariante (8) als gegeben auf und wenden auf sie die inverse Operation Ω^{-1} an. Der Operator Ω^{-1} gestattet die beiden Entwicklungen

$$(10) \qquad \begin{aligned} \Omega_1^{-1} &= \frac{1}{\alpha_1 \beta_2 \left(1 - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}\right)} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_2} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1^2 \beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2 \beta_1^2}{\alpha_1^3 \beta_2^3} + \cdots, \\ \Omega_2^{-1} &= -\frac{1}{\alpha_2 \beta_1 \left(1 - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}\right)} = -\frac{1}{\alpha_2 \beta_1} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2^2 \beta_1^2} - \frac{\alpha_1^2 \beta_2^2}{\alpha_2^3 \beta_1^3} - \cdots \end{aligned}$$

Da jedoch der Ausdruck (8) sowohl in den x als auch in den y linear ist, so brechen die Entwicklungen (10) mit dem zweiten Gliede ab; alle folgenden Glieder können gestrichen werden, so daß man hat

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Omega_1^{-1} &= \frac{1}{\alpha_1 \beta_2} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1^2 \beta_2^2}, \\ \Omega_2^{-1} &= -\frac{1}{\alpha_2 \beta_1} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2^2 \beta_1^2}. \end{aligned}$$

Daher wird

(12) $$\Phi_1(x|y) = \Omega_1^{-1} J(x|y)$$
$$= 4\Big[\frac{x_1}{\alpha_1} \frac{(A_0 A_1)}{\beta_2} + \frac{x_2}{\alpha_1} \frac{(B_0 B_1)}{\beta_2}$$
$$+ \frac{\alpha_2 x_1}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1 (A_0 A_1)}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2 x_2}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1 (B_0 B_1)}{\beta_2^2} \Big],$$

und nach Ausführung der Differentiation und Integration

(13) $$\Phi_1(x|y) = x_1^2 (0 A_0 A_1) + 2 x_1 x_2 (0 B_0 B_1) + x_1^2 (0 0 B_0)$$

oder endlich nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder

(14) $$\Phi_1(x|y) = x_1^2 (0 A_0 | A_1 + B_0) + 2 x_1 x_2 (0 B_0 B_1).$$

Die so gewonnene Form (14) besitzt die gleiche polarisierte Kovariante (8) wie das Produkt f·g der Urformen (4) selbst; denn operiert man an (14) mit dem Symbol $\Omega = (\alpha\beta)$, so erhält man (8) zurück. Eine zweite Form mit der gleichen Eigenschaft liefert die zweite Entwicklung (11). Es wird nämlich

(15) $$\Phi_2(x|y) = \Omega_2^{-1} J(x|y)$$
$$= -4\Big[\frac{x_1}{\alpha_2} \frac{(A_0 A_1)}{\beta_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} \frac{(B_0 B_1)}{\beta_1}$$
$$+ \frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2^2} \frac{\beta_2 (A_0 A_1)}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2^2} \frac{\beta_2 (B_0 B_1)}{\beta_1^2} \Big]$$

oder

(16) $$\Phi_2(x|y) = -2 x_1 x_2 (A_0 A_1 0) - x_2^2 (B_0 B_1 0) - x_2^2 (A_1 0 0)$$
$$= -2 x_1 x_2 (A_0 A_1 0) - x_2^2 (A_1 + B_0 | B_1 0).$$

Auch diese Form (16) liefert, wie man sich leicht überzeugt, die Kovariante (8), wenn man an ihr mit dem Symbol $\Omega = (\alpha\beta)$ operiert. Mithin bestimmen (14) und (16) das Büschel

(17) $$\varkappa \Phi_1 + \lambda \Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1)$$

mit der Eigenschaft, daß für $\varkappa + \lambda = 1$ alle in (17) enthaltenen Formen den Ausdruck (8) zur vorgeschriebenen Kovariante haben. Dieses Büschel (17) ist aber noch nicht der allgemeinste Ausdruck dieser

Art; es fehlt der Zusatzterm Φ_0, der unter Wirkung von Ω verschwindet. Nach § 7 ist Φ_0 für den vorliegenden Fall eine Polare einer Form $\varphi(x_1|x_2)$. Da die Funktionen Φ_1 und Φ_2 in den $x_1|x_2$ sowie in den $y_1|y_2$ quadratisch sind, so muß Φ_0 die zweite Polare nach x in bezug auf y einer biquadratischen Form $\varphi(x_1|x_2)$ sein. Setzen wir also

$$\varphi(x_1|x_2) = (c_0c_1c_2c_3c_4\,\mathfrak{x}\,x_1|x_2), \tag{18}$$

so nimmt Φ_0 die Gestalt an

$$\Phi_0(x|y) = \left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2\varphi = y_1^{\,2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^{\,2}} + 2y_1y_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} + y_2^{\,2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^{\,2}} \tag{19}$$

oder ausgerechnet

$$\Phi_0(x|y) = x_1^{\,2}(c_0c_1c_2) + 2x_1x_2(c_1c_2c_3) + x_2^{\,2}(c_2c_3c_4). \tag{20}$$

Aus (17) und (20) folgt dann, daß die Funktion

$$\Phi(x|y) = \Phi_0 + \varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1) \tag{21}$$

die Gesamtheit aller Doppelformen mit vorgeschriebener Kovariante (8) darstellt. Insbesondere muß auch das Produkt $f\cdot g$ der Urformen (4) in (21) enthalten sein.

II. Beispiel: Funktionaldeterminante zweier kubischen Formen.

Es seien

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) &= (a_0a_1a_2a_3\,\mathfrak{x}\,x_1|x_2) = (a_0a_1a_2a_3), \\ g(y_1|y_2) &= (b_0b_1b_2b_3\,\mathfrak{x}\,y_1|y_2) = (b_0b_1b_2b_3) \end{aligned} \tag{22}$$

zwei kubische Grundformen mit der Funktionaldeterminante

$$J(x|y) = \Omega f\cdot g = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)f\cdot g = \begin{vmatrix} \alpha_1 f & \alpha_2 f \\ \beta_1 g & \beta_2 g \end{vmatrix} \tag{23}$$

oder

$$J(x|y) = 9\begin{vmatrix} (a_0a_1a_2) & (a_1a_2a_3) \\ (b_0b_1b_2) & (b_1b_2b_3) \end{vmatrix} = 9[x_1^{\,2}(A_0A_1A_2) + 2x_1x_2(B_0B_1B_2) + x_2^{\,2}(C_0C_1C_2)]. \tag{24}$$

Hierin bedeuten

$$(25)\quad \begin{array}{lll} A_0 = a_0b_1 - a_1b_0, & B_0 = a_1b_1 - a_2b_0, & C_0 = a_2b_1 - a_3b_0, \\ A_1 = a_0b_2 - a_1b_1, & B_1 = a_1b_2 - a_2b_1, & C_1 = a_2b_2 - a_3b_1, \\ A_2 = a_0b_3 - a_1b_2, & B_2 = a_1b_3 - a_2b_2, & C_2 = a_2b_3 - a_3b_2. \end{array}$$

Faßt man jetzt umgekehrt die Kovariante (24) als gegeben auf, so hat man zur Ausführung der inversen Operation Ω^{-1} an (24) diesmal zu setzen

$$(26)\quad \begin{aligned} \Omega_1^{-1} &= \frac{1}{a_1\beta_2} + \frac{a_2\beta_1}{a_1^2\beta_2^2} + \frac{a_2^2\beta_1^2}{a_1^3\beta_2^3}, \\ \Omega_2^{-1} &= -\frac{1}{a_2\beta_1} - \frac{a_1\beta_2}{a_2^2\beta_1^2} - \frac{a_1^2\beta_2^2}{a_2^3\beta_1^3}. \end{aligned}$$

Demnach folgt aus (24) und (26)

$$(27)\quad \Phi_1(x|y) = \Omega_1^{-1} J(x|y)$$

$$\begin{aligned} = 9\Big[&\frac{x_1^2}{a_1}\,\frac{(A_0A_1A_2)}{\beta_2} + \frac{2x_1x_2}{a_1}\,\frac{(B_0B_1B_2)}{\beta_2} + \frac{x_2^2}{a_1}\,\frac{(C_0C_1C_2)}{\beta_2} \\ &+ \frac{a_2x_1^2}{a_1^2}\,\frac{\beta_1(A_0A_1A_2)}{\beta_2^2} + \frac{a_2 2x_1x_2}{a_1^2}\,\frac{\beta_1(B_0B_1B_2)}{\beta_2^2} + \frac{a_2x_2^2}{a_1^2}\,\frac{\beta_1(C_0C_1C_2)}{\beta_2^2} \\ &+ \frac{a_2^2x_1^2}{a_1^3}\,\frac{\beta_1^2(A_0A_1A_2)}{\beta_2^3} + \frac{a_2^2 2x_1x_2}{a_1^3}\,\frac{\beta_1^2(B_0B_1B_2)}{\beta_2^3} + \frac{a_2^2x_2^2}{a_1^3}\,\frac{\beta_1^2(C_0C_1C_2)}{\beta_2^3}\Big] \end{aligned}$$

oder ausgerechnet (28)

$$\begin{aligned} \Phi_1(x|y) = {} & x_1^3(0A_0A_1A_2) + 3x_1^2x_2(0B_0B_1B_2) + 3x_1x_2^2(0C_0C_1C_2) \\ & + x_1^3(00\,B_0B_1) + 3x_1^2x_2(00\,C_0\,C_1) \\ & + x_1^3(000C_0). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung gleichartiger Glieder folgt endlich aus (28) die Form (29)

$$\begin{aligned} \Phi_1(x|y) = x_1^3(0A_0|A_1 + B_0|A_2 + B_1 + C_0) + 3x_1^2x_2(0B_0|B_1 + C_0|B_2 + C_1) \\ + 3x_1x_2^2(0C_0C_1C_2). \end{aligned}$$

Die Form (29) liefert, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Kovariante (24) zurück, wenn man an ihr mit dem Symbol $\Omega = (\alpha\beta)$ operiert. Um nun eine zweite Form der gleichen Bedingung zu finden, hat man zu bilden

$$(30)\quad \Phi_2(x|y) = \Omega_2^{-2} J(x|y).$$

Anstatt jedoch die Operation (30) vollständig auszuführen, kann man Φ_2 auch direkt aus Φ_1 ableiten. Zu dem Zweck beachte man, daß das Produkt f·g der ursprünglichen Formen (22) sich nicht ändert, wenn man in ihm gleichzeitig

$$(31)\qquad \begin{array}{l|l} x_1 \text{ mit } x_2, & y_1 \text{ mit } y_2, \\ a_0 \;„\; a_3, & b_0 \;„\; b_3, \\ a_1 \;„\; a_2, & b_1 \;„\; b_2 \end{array}$$

vertauscht. Der Operator Ω ändert hierbei nur das Vorzeichen, bleibt sonst aber unverändert. Infolgedessen ändert wegen (23) die Kovariante $J(x|y)$ ebenfalls nur das Vorzeichen. Der inverse Operator Ω_1^{-1} aber geht durch die Substitution (31) in $-\Omega_2^{-1}$ über, so daß man also vermöge (31) aus (29) unmittelbar den Ausdruck (30) erhält. Die Koeffizienten (25) vertauschen sich hierbei in der Weise, daß

$$(32)\qquad \begin{array}{ll} A_0 \text{ übergeht in } & -C_2, \\ A_1 \quad „ \quad „ & -C_1, \\ A_2 \quad „ \quad „ & -C_0, \\ B_0 \quad „ \quad „ & -B_2, \\ B_1 \quad „ \quad „ & -B_1. \end{array}$$

Aus (28), (31) und (32) folgt dann zunächst (33)

$$\begin{aligned}\Phi_2(x|y) = &-x_2^3(0C_2C_1C_0) - 3x_2^2x_1(0B_2B_1B_0) - 3x_2x_1^2(0A_2A_1A_0)\\ &-x_2^3(00B_2B_1) - 3x_2^2x_1(00A_2A_1)\\ &-x_2^3(000A_2),\end{aligned}$$

wobei man zu beachten hat, daß in den Klammersymbolen jetzt y_1 in aufsteigender und y_2 in absteigender Potenzreihe vorkommt. Ordnet man nun (33) nach fallenden Potenzen von x_1 und die Glieder der Klammersymbole nach fallenden Potenzen von y_1, so erhält man (34)

$$\begin{aligned}\Phi_2(x|y) = &-3x_1^2x_2(A_0A_1A_20) - 3x_1x_2^2(B_0B_1B_20) - x_2^3(C_0C_1C_20)\\ &-3x_1x_2^2(A_1A_200) - x_2^3(B_1B_200)\\ &-x_2^3(A_2000)\end{aligned}$$

oder schließlich nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder

(35) $\Phi_2(x|y) = -3x_1^2x_2(A_0A_1A_20) - 3x_1x_2^2(B_0 + A_1|B_1 + A_2|B_20)$
$- x_2^3(C_0 + B_1 + A_2|C_1 + B_2|C_20).$

Die Ausdrücke (29) und (35) bestimmen alsdann das Büschel

(36) $\varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1),$

dessen sämtliche Formen für $\varkappa + \lambda = 1$ die Form (24) zur vorgeschriebenen polarisierten Funktionaldeterminante haben. Um nun auch den allgemeinsten Ausdruck dieser Art zu erhalten, hat man zu (36) noch eine Polare Φ_0 zu addieren. Da das Büschel (36) in den x sowie in den y von der 3. Ordnung ist, so muß Φ_0 die 3. Polare nach x in bezug auf y einer Form 6. Ordnung sein. Ist also

(37) $\varphi(x_1|x_2) = (c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6),$

so wird

(38) $$\Phi_0(x|y) = \left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^3\varphi$$
$$= y_1^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + 3y_1^2y_2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2\partial x_2} + 3y_1y_2^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1\partial x_2^2} + y_2^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_2^3}.$$

Ordnet man (38) nach erfolgter Ausrechnung nach fallenden Potenzen von x_1, so ergibt sich

(39) $\Phi_0(x|y) = x_1^3(c_0c_1c_2c_3) + 3x_1^2x_2(c_1c_2c_3c_4) + 3x_1x_2^2(c_2c_3c_4c_5)$
$+ x_2^3(c_3c_4c_5c_6).$

Aus (36) und (39) erhält man schließlich

(40) $\Phi(x|y) = \Phi_0 + \varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1)$

als allgemeinsten Ausdruck, der sämtliche Doppelformen enthält, die in der vorgegebenen Kovariante (24) übereinstimmen.

III. Beispiel: Funktionaldeterminante zweier Formen n^{ter} Ordnung.

Es sei

(41) $f(x_1|x_2) = (a_0a_1a_2 \ldots a_n),$
$g(y_1|y_2) = (b_0b_1b_2 \ldots b_n).$

Dann wird

$$J(x|y) = \Omega f \cdot g = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) f \cdot g \tag{42}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 f & \alpha_2 f \\ \beta_1 g & \beta_2 g \end{vmatrix}$$

oder

$$J(x|y) = n^2 \begin{vmatrix} (a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}) & (a_1 a_2 a_3 \dots . a_n) \\ (b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}) & (b_1 b_2 b_3 \dots . b_n) \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Mithin (44)

$$J(x|y) = n^2 \left[x_1^{n-1} \left(A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{n-1}^{(0)} \right) + \binom{n-1}{1} x_1^{n-2} x_2 \left(A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)} \right) + \dots \right.$$
$$\left. + \dots + x_2^{n-1} \left(A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)} \right) \right]$$

oder

$$J(x|y) = n^2 \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{\nu} x_1^{n-\nu} x_2^{\nu} \left(A_0^{(\nu)} A_1^{(\nu)} \dots A_{n-1}^{(\nu)} \right). \tag{45}$$

Hierin ist gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_0^{(\nu)} &= a_\nu b_1 - a_{\nu+1} b_0, \\
A_1^{(\nu)} &= a_\nu b_2 - a_{\nu+1} b_1, \\
A_2^{(\nu)} &= a_\nu b_3 - a_{\nu+1} b_2, \\
&\text{— — — — — — — —} \\
A_\mu^{(\nu)} &= a_\nu b_{\mu+1} - a_{\nu+1} b_\mu, \\
&\text{— — — — — — — —} \\
A_{n-1}^{(\nu)} &= a_\nu b_n - a_{\nu+1} b_{n-1}, \\
&\qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, (n-1)).
\end{aligned} \tag{46}$$

Die beiden Reihenentwicklungen des inversen Operators Ω^{-1} lauten für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{-1} &= \frac{1}{\alpha_1\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2\beta_2^2} + \dots + \frac{\alpha_2^{n-1}\beta_1^{n-1}}{\alpha_1^n\beta_2^n}, \\
\Omega_2^{-1} &= -\frac{1}{\alpha_2\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2\beta_1^2} - \dots - \frac{\alpha_1^{n-1}\beta_2^{n-1}}{\alpha_2^n\beta_1^n}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Daher wird

(48) $$\Phi_1(x|y) = \Omega_1^{-1} J(x|y)$$

$$= n^2 \Bigg[\frac{x_1^{n-1}}{\alpha_1} \frac{\left(A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{n-1}^{(0)}\right)}{\beta_2} + \binom{n-1}{1} \frac{x_1^{n-2} x_2}{\alpha_1} \frac{\left(A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)}\right)}{\beta_2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \frac{x_1 x_2^{n-2}}{\alpha_1} \frac{\left(A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)} \dots A_{n-1}^{(n-2)}\right)}{\beta_2} + \frac{x_2^{n-1}}{\alpha_1} \frac{\left(A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)}\right)}{\beta_2}$$

$$+ \frac{\alpha_2 x_1^{n-1}}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1\left(A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{n-1}^{(0)}\right)}{\beta_2^2} + \binom{n-1}{1} \frac{\alpha_2 x_1^{n-2} x_2}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1\left(A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)}\right)}{\beta_2^2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \frac{\alpha_2 x_1 x_2^{n-2}}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1\left(A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)} \dots A_{n-1}^{(n-2)}\right)}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2 x_2^{n-1}}{\alpha_1^2} \frac{\beta_1\left(A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)}\right)}{\beta_2^2}$$

$$+ \text{---}$$

$$+ \frac{\alpha_2^{n-2} x_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1}} \frac{\beta_1^{n-2}\left(A_0^{(0)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(0)}\right)}{\beta_2^{n-1}} + \binom{n-1}{1} \frac{\alpha_2^{n-2} x_1^{n-2} x_2}{\alpha_1^{n-1}} \frac{\beta_1^{n-2}\left(A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)}\right)}{\beta_2^{n-1}} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \frac{\alpha_2^{n-2} x_1 x_2^{n-2}}{\alpha_1^{n-1}} \frac{\beta_1^{n-2}\left(A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)} \dots A_{n-1}^{(n-2)}\right)}{\beta_2^{n-1}} + \frac{\alpha_2^{n-2} x_2^{n-1}}{\alpha_1^{n-1}} \frac{\beta_1^{n-2}\left(A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)}\right)}{\beta_2^{n-1}}$$

$$+ \frac{\alpha_2^{n-1} x_1^{n-1}}{\alpha_1^{n}} \frac{\beta_1^{n-1}\left(A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{n-1}^{(0)}\right)}{\beta_2^{n}} + \binom{n-1}{1} \frac{\alpha_2^{n-1} x_1^{n-2} x_2}{\alpha_1^{n}} \frac{\beta_1^{n-1}\left(A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)}\right)}{\beta_2^{n}} + \dots + \binom{n-1}{n-2} \frac{\alpha_2^{n-1} x_1 x_2^{n-1}}{\alpha_1^{n}} \frac{\beta_1^{n-1}\left(A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)} \dots A_{n-1}^{(n-2)}\right)}{\beta_2^{n}} + \frac{\alpha_2^{n-1} x_2^{n-1}}{\alpha_1^{n}} \frac{\beta_1^{n-1}\left(A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)}\right)}{\beta_2^{n}} \Bigg]$$

oder ausgerechnet

(49) $$\Phi_1(x|y) =$$

$$x_1^n \left(0 A_0^{(0)} A_1^{(0)} \dots A_{n-1}^{(0)}\right) + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 \left(0 A_0^{(1)} A_1^{(1)} \dots A_{n-1}^{(1)}\right) + \dots + \binom{n}{2} x_1^2 x_2^{n-2} \left(0 A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)} \dots A_{n-1}^{(n-2)}\right) + \binom{n}{1} x_1 x_2^{n-1} \left(0 A_0^{(n-1)} \dots A_{n-1}^{(n-1)}\right)$$

$$+ x_1^n \left(0\ 0\ A_0^{(1)} \dots A_{n-2}^{(1)}\right) + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 \left(0\ 0\ A_0^{(2)} \dots A_{n-2}^{(2)}\right) + \dots + \binom{n}{2} x_1^2 x_2^{n-2} \left(0\ 0\ A_0^{(n-1)} \dots A_{n-2}^{(n-1)}\right)$$

$$+ \text{---}$$

$$+ x_1^n \left(0\ 0\ 0 \dots A_0^{(n-2)} A_1^{(n-2)}\right) + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 \left(0\ 0\ 0 \dots A_0^{(n-1)} A_1^{(n-1)}\right)$$

$$+ x_1^n \left(0\ 0\ 0 \dots 0\ A_0^{(n-1)}\right).$$

Somit ergibt sich

$$(50) \qquad \Phi_1(x|y) = \sum_0^{n-1} \binom{n}{\nu} x_1^{n-\nu} x_2^{\nu} \left(0\, B_0^{(\nu)} B_1^{(\nu)} \ldots B_{n-1}^{(\nu)}\right),$$

worin für

$$(51) \qquad B_\mu^{(\nu)} = \sum_0^{\mu} A_{\mu-i}^{(\nu+i)} \qquad (\nu + i \leqq n-1)$$

gesetzt ist, wovon man sich leicht durch Einsetzen und Vergleich mit (49) überzeugt. Die Reihe (51) kann unter Umständen schon vorher abbrechen, ehe die Summation bis zum Index μ vorgeschritten ist, nämlich in allen Fällen, in denen der obere Index $\nu + i$ in $A_{\mu-i}^{(\nu+i)}$ größer als $n-1$ wird, da ja ein Koeffizient $A_\mu^{(\nu)}$ für $\nu > n-1$ in (46) nicht vorkommt. Man hat demnach ganz allgemein in (51)

$$(52) \qquad A_{\mu-i}^{(\nu+i)} \equiv 0 \text{ für } \nu + i > n-1$$

zu setzen.

Die Form (50) besitzt die gleiche polarisierte Funktionaldeterminante (45) wie das Produkt der Ausgangsformen (41); denn operiert man an (50) mit dem Symbol $\Omega = (\alpha\beta)$, so erhält man die Kovariante (41) zurück.

Um nun die zweite Form

$$(53) \qquad \Phi_2(x|y) = \Omega_2^{-1} J(x|y)$$

abzuleiten, die das gleiche Verhalten wie (50) zeigt, ist es nicht notwendig, die Operation Ω_2^{-1} wirklich auszuführen. Vielmehr ergibt sich auch hier nach der S. 56 angestellten Überlegung der Ausdruck Φ_2 unmittelbar aus Φ_1, wenn man in letzterem gleichzeitig

$$(54) \qquad \begin{array}{l} x_1 \text{ mit } x_2, \qquad y_1 \text{ mit } y_2, \\ a_\nu \quad \text{„} \quad a_{n-\nu}, \; b_\nu \quad \text{„} \quad b_{n-\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

vertauscht. Hierdurch gehen die Koeffizienten $A_\mu^{(\nu)}$ über in $-A_{n-1-\mu}^{(n-1-\nu)}$, infolgedessen $A_{\mu-i}^{(\nu+i)}$ in $-A_{n-1-\mu+i}^{(n-1-\nu-i)}$. Setzt man

nun $n-1-\nu=\nu'$ und $n-1-\mu=\mu'$, so gehen die Koeffizienten $B_\mu^{(\nu)}$ über in $-C_{\mu'}^{(\nu')}=-\sum_0^{\nu'} A_{\mu'+i}^{(\nu'-i)}$, wenn

$$C_\mu^{(\nu)}=\sum_0^{\nu} A_{\mu+i}^{(\nu-i)} \qquad (\mu+i\leqq n-1) \tag{55}$$

bedeutet. Daher folgt aus (50) und (54) zunächst (56)

$$\Phi_2(x|y)=-\sum_0^{n-1}\binom{n}{\nu} x_2^{n-\nu}\, x_1^{\nu}\left(0\, C_{n-1}^{(n-1-\nu)} C_{n-2}^{(n-1-\nu)}\dots C_0^{(n-1-\nu)}\right),$$

wobei man zu beachten hat, daß in dem Klammersymbol die Glieder nach steigenden Potenzen von y_1 geordnet sind. Ordnet man also den Ausdruck (56) nach fallenden Potenzen von x_1 und die Glieder der Klammersymbole nach fallenden Potenzen von y_1, so folgt schließlich

$$\Phi_2(x|y)=-\sum_0^{n-1}\binom{n}{\nu+1} x_1^{n-1-\nu} x_2^{\nu+1}\left(C_0^{(\nu)} C_1^{(\nu)}\dots C_{n-1}^{(\nu)} 0\right), \tag{57}$$

wo jedem Koeffizient $C_\mu^{(\nu)}$ die Bedeutung (55) zukommt. Auch hier ist es möglich, daß die Reihe (55) schon eher abbricht, bevor die Summation bis zum Index ν vorgeschritten ist. Es tritt dies ein, wenn der untere Index $\mu+i$ in $A_{\mu+i}^{(\nu-i)}$ größer als $n-1$ wird. Man hat also in (55) allgemein

$$A_{\mu+i}^{(\nu-i)}\equiv 0 \text{ für } \mu+i>n-1 \tag{58}$$

zu setzen.

Die beiden Funktionen (50) und (57) bestimmen das Büschel

$$\varkappa\,\Phi_1+\lambda\,\Phi_2 \qquad (\varkappa+\lambda=1), \tag{59}$$

dessen sämtliche Formen den Ausdruck (45) zur vorgeschriebenen Kovariante haben. Um endlich den allgemeinsten Ausdruck dieser Art zu erhalten, hat man zu (59) noch den Term Φ_0 zu addieren, wo Φ_0 die n^{te} Polare nach x in bezug auf y einer Form $\varphi(x_1|x_2)$ von der Ordnung 2n ist. Setzt man also

$$\varphi(x_1|x_2)=(c_0 c_1 c_2 \dots . c_{2n}), \tag{60}$$

so wird

$$(61)\qquad \Phi_0(x|y) = \left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^n \varphi$$

$$= \sum_0^n \binom{n}{\nu} y_1^{n-\nu}\, y_2^{\nu} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{\,n-\nu}\, \partial x_2^{\nu}}$$

oder ausgerechnet

$$(62)\qquad \Phi_0(x|y) = \sum_0^n \binom{n}{\nu} x_1^{n-\nu}\, x_2^{\nu}\, (c_\nu\, c_{\nu+1} \dots c_{\nu+n}).$$

Daher folgt aus (59) und (62), daß der Ausdruck

$$(63)\qquad \Phi(x|y) = \Phi_0 + \varkappa\,\Phi_1 + \lambda\,\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1)$$

als allgemeinste Lösung der Gleichung

$$(64)\qquad J(x|y) = \Omega\,\Phi(x|y)$$

das Produkt der Ausgangsformen (41) selbst enthalten muß.

§ 9.
Anwendung auf die Hessesche Kovariante.

I. Beispiel: Hessesche Kovariante einer kubischen Form. Es sei

$$(1)\qquad f(x_1|x_2) = (a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, \mathfrak{x}\, x_1|x_2) = (a_0\, a_1\, a_2\, a_3)$$

eine kubische Form. Ihre polarisierte Hessesche Kovariante lautet

$$(2)\qquad H(x|y) = \Omega^2 f(x_1|x_2)\, f(y_1|y_2)$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 f(x_1|x_2)\, f(y_1|y_2),$$

worin

$$(3)\qquad \alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (i = 1,2)$$

bedeuten. Aus (2) folgt

$$(4)\quad H(x|y) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 f(x) & \alpha_1\alpha_2 f(x) \\ \beta_1\beta_2 f(y) & \beta_2^2 f(y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2^2 f(x) & \alpha_1\alpha_2 f(x) \\ \beta_1\beta_2 f(y) & \beta_1^2 f(y) \end{vmatrix}$$

$$= 36 \begin{vmatrix} (a_0\, a_1\, \mathfrak{x}\, x) & (a_1\, a_2\, \mathfrak{x}\, x) \\ (a_1\, a_2\, \mathfrak{x}\, y) & (a_2\, a_3\, \mathfrak{x}\, y) \end{vmatrix} + 36 \begin{vmatrix} (a_2\, a_3\, \mathfrak{x}\, x) & (a_1\, a_2\, \mathfrak{x}\, x) \\ (a_1\, a_2\, \mathfrak{x}\, y) & (a_0\, a_1\, \mathfrak{x}\, y) \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$H(x|y) = 36\,[x_1(A_0A_1) + x_2(A_1A_2)], \tag{5}$$

wo

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\,(a_0a_2 - a_1^2)\,, \\ A_1 &= \;\; a_0a_3 - a_1a_2\,, \\ A_2 &= 2\,(a_1a_3 - a_2^2)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir fassen nun umgekehrt die polarisierte Kovariante (5) als gegeben auf und operieren an ihr mit dem Symbol Ω^{-2}. Der Operator Ω^{-2} läßt sich in 2 Reihenentwicklungen auflösen

$$\Omega_1^{-2} = \frac{1}{(a_1\beta_2 - a_2\beta_1)^2} = \frac{1}{a_1^2\beta_2^2\left(1 - \frac{a_2\beta_1}{a_1\beta_2}\right)^2} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{a_1^2\beta_2^2} + 2\frac{a_2\beta_1}{a_1^3\beta_2^3} + 3\frac{a_2^2\beta_1^2}{a_1^4\beta_2^4} + \cdots$$

und

$$\Omega_2^{-2} = \frac{1}{(a_2\beta_1 - a_1\beta_2)^2} = \frac{1}{a_2^2\beta_1^2\left(1 - \frac{a_1\beta_2}{a_2\beta_1}\right)^2} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{a_2^2\beta_1^2} + 2\frac{a_1\beta_2}{a_2^3\beta_1^3} + 3\frac{a_1^2\beta_2^2}{a_2^4\beta_1^4} + \cdots.$$

Da jedoch die Kovariante (5) in den x und y je linear ist, so brechen die Entwicklungen (7) und (8) mit dem zweiten Gliede ab, so daß man hat

$$\Omega_1^{-2} = \frac{1}{a_1^2\beta_2^2} + 2\frac{a_2\beta_1}{a_1^3\beta_2^3} \tag{9}$$

und

$$\Omega_2^{-2} = \frac{1}{a_2^2\beta_1^2} + 2\frac{a_1\beta_2}{a_2^3\beta_1^3}. \tag{10}$$

Mithin folgt

$$\begin{aligned} \Phi_1(x|y) &= \Omega_1^{-2}\,H\,(x|y) \\ &= 36\left[\frac{x_1}{a_1^2}\;\frac{(A_0A_1)}{\beta_2^2} + \frac{x_2}{a_1^2}\;\frac{(A_0A_1)}{\beta_2^2}\right. \\ &+ \left.\frac{2a_2x_1}{a_1^3}\,\frac{\beta_1(A_0A_1)}{\beta_2^3} + \frac{2a_2x_2}{a_1^3}\,\frac{\beta_1(A_0A_1)}{\beta_2^3}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

oder ausgerechnet

$$(12)\quad \Phi_1(x|y) = x_1^3(00A_0A_1) + 3x_1^2x_2(00A_1A_2) + 2x_1^3(000A_1)$$
$$= x_1^3(00A_0|3A_1) + 3x_1^2x_2(00A_1A_2).$$

Der Ausdruck (12) besitzt die gleiche polarisierte Hessesche Kovariante (5) wie die Ausgangsform (1) selbst; denn operiert man an (12) mit dem Symbol Ω^2, so erhält man (5) zurück. Eine zweite Form mit der gleichen Eigenschaft liefert die Operation

$$(13)\qquad \Phi_2(x|y) = \Omega_2^{-2} H(x|y).$$

Anstatt jedoch diese Operation wirklich auszuführen, kann man Φ_2 auch direkt aus Φ_1 ableiten. Das Produkt $f(x_1|x_2)f(y_1|y_2)$ der Ausgangsformen ändert sich ja nicht, wenn man x_i mit y_i vertauscht. Da nun der Operator Ω^2 bei dieser Vertauschung keine Veränderung erleidet, so bleibt auch $H(x|y)$ wegen (2) unverändert. Der inverse Operator Ω_1^{-2} aber geht dabei in Ω_2^{-2} über; mithin folgt Φ_2 unmittelbar aus Φ_1, wenn man hierin die genannte Substitution vornimmt. Daher wird

$$(14)\qquad \Phi_2(x|y) = y_1^3(00A_0|3A_1) + 3y_1^2y_2(00A_1A_2)$$

oder nach Potenzen von x geordnet

$$(15)\qquad \Phi_2(x|y) = 3x_1x_2^2(A_0A_100) + x_2^3(3A_1|A_200).$$

Aus Φ_1 und Φ_2 erhält man alsdann ein Formenbüschel

$$(16)\qquad \varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1),$$

dessen sämtliche Formen eine vorgeschriebene polarisierte Hessesche Kovariante haben. Um nun den allgemeinsten Ausdruck der verlangten Art zu erhalten, hat man zu (16) noch das Glied Φ_0 zu addieren, das unter Wirkung von Ω^2 verschwindet. Ist also

$$(17)\qquad \Omega^2\Phi_0 = 0,$$

so wird nach § 7

$$(18)\qquad \Omega\Phi_0 = \Pi_1,$$

wo Π_1 eine Polare bedeutet. Hieraus folgt

$$(19)\qquad \Phi_0 = \Omega^{-1}\Pi_1 + \Pi_2,$$

wo Π_2 ebenfalls eine Polare ist. Da nun der Ausdruck Φ_0 wegen der Homogenität der Variabeln in den x wie in den y von dritter Ordnung sein muß, so ist Π_1 in den x und y quadratisch und Π_2 in x und y von der Ordnung 3 zu wählen. Bildet man daher zwei allgemeine Formen φ_1 und φ_2, die in $x_1|x_2$ von der Ordnung 4 bezw. 6 sind, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1|x_2) &= 9(b_0 b_1 b_3 b_4 \mathfrak{x} x_1|x_2),^1) \\ \varphi_2(x_1|x_2) &= (c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \mathfrak{x} x_1|x_2), \end{aligned} \tag{20}$$

so ist

$$\Pi_1 = 9\left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2\varphi_1 \tag{21}$$

und

$$\Pi_2 = \left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^3\varphi_2 \tag{22}$$

oder ausgerechnet

$$\Pi_1 = 9[x_1^2(b_0 b_1 b_2) + 2x_1 x_2(b_1 b_2 b_3) + x_2^2(b_2 b_3 b_4)] \tag{23}$$

und

$$\Pi_2 = x_1^3(c_0 c_1 c_2 c_3) + 3x_1^2 x_2(c_1 c_2 c_3 c_4) + 3x_1 x_2^2(c_2 c_3 c_4 c_5) + x_2^3(c_3 c_4 c_5 c_6). \tag{24}$$

Löst man nun die Gleichung

$$\Psi = \Omega^{-1}\Pi_1 \tag{25}$$

durch Ausführung der inversen Operation [2])

$$\Omega_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\beta_1^2}{\alpha_1^3\beta_2^3} \tag{26}$$

auf, so ergibt sich

---

[1]) Der Faktor 9 in φ_1 hat den Zweck, den entstehenden Ausdruck (25) von einem Zahlfaktor zu befreien.

[2]) Nach dem in § 7, S. 47 ff. angegebenen allgemeinen Verfahren hätte man eigentlich zwei spezielle Lösungen $\Psi_1 = \Omega_1^{-1}\Pi_1$ und $\Psi_2 = \Omega_2^{-1}\Pi_1$ von $\Omega\Psi = \Pi_1$ zu bilden, die sich alsdann zu einer dritten Lösung $\Psi = p\Psi_1 + q\Psi_2$ für $p + q = 1$ zusammensetzen. Der Kürze wegen ist hier $p = 1$ und $q = 0$, also $\Psi = \Psi_1$ gesetzt, was nach der Bemerkung S. 48, Zeile 4 von unten, keine Einschränkung bedeutet.

$$(27)\quad \Psi = 9\Big[\frac{x_1^2}{a_1}\frac{(b_0b_1b_2)}{\beta_2} + 2\frac{x_1x_2}{a_1}\frac{(b_1b_2b_3)}{\beta_2} + \frac{x_2^2}{a_1}\frac{(b_2b_3b_4)}{\beta_2}$$

$$+ \frac{a_2x_1^2}{a_1^2}\frac{\beta_1(b_0b_1b_2)}{\beta_2^2} + 2\frac{a_2x_1x_2}{a_1^2}\frac{\beta_1(b_1b_2b_3)}{\beta_2^2} + \frac{a_2x_2^2}{a_1^2}\frac{\beta_1(b_2b_3b_4)}{\beta_2^2}$$

$$+ \frac{a_2^2x_1^2}{a_1^3}\frac{\beta_1^2(b_0b_1b_2)}{\beta_2^3} + 2\frac{a_2^2x_1x_2}{a_1^3}\frac{\beta_1^2(b_1b_2b_3)}{\beta_2^3} + \frac{a_2^2x_2^2}{a_1^3}\frac{\beta_1^2(b_2b_3b_4)}{\beta_2^3}\Big]$$

oder

$$(28)\quad \Psi = x_1^3(0\,b_0b_1b_2) + 3x_1^2x_2(0\,b_1b_2b_3) + 3x_1x_2^2(0\,b_2b_3b_4)$$
$$+ x_1^3(0\,0\,b_1b_2) + 3x_1^2x_2(0\,0\,b_2b_3)$$
$$+ x_1^3(0\,0\,0\,b_2)$$

und nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder

$$(29)\quad \Psi = x_1^3(0|b_0|2b_1|3b_2) + 3x_1^2x_2(0|b_1|2b_2|2b_3)$$
$$+ 3x_1x_2^2(0\,b_2b_3b_4).$$

Addiert man endlich die Formen (24) und (29), so folgt

$$(30)\quad \Phi_0 = x_1^3(c_0|c_1 + b_0|c_2 + 2b_1|c_3 + 3b_2)$$
$$+ 3x_1^2x_2(c_1|c_2 + b_1|c_3 + 2b_2|c_4 + 2b_3)$$
$$+ 3x_1x_2^2(c_2|c_3 + b_2|c_4 + b_3|c_5 + b_4) + x_2^3(c_3c_4c_5c_6).$$

Dieser Ausdruck (30) stellt für den vorliegenden Fall den allgemeinsten Term dar, dessen polarisierte Hessesche Kovariante, wie man leicht durch Ausrechnung zeigt, identisch verschwindet. Demnach wird das Büschel

$$(31)\qquad \Phi(x|y) = \Phi_0 + \varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \quad (\varkappa + \lambda = 1)$$

ein vollständiges, d.h. es enthält sämtliche Formen mit vorgeschriebener Kovariante (5).

II. Beispiel: Hessesche Kovariante einer biquadratischen Form. Es sei

$$(32)\qquad f(x_1|x_2) = (a_0a_1a_2a_3a_4\,\mathfrak{x}x_1|x_2) = (a_0a_1a_2a_3a_4).$$

Dann ist

$$(33)\qquad H(x|y) = \Omega^2 f(x_1|x_2)\, f(y_1|y_2)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1^2 f(x) & \alpha_1\alpha_2 f(x) \\ \beta_1\beta_2 f(y) & \beta_2^2 f(y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2^2 f(x) & \alpha_1\alpha_2 f(x) \\ \beta_1\beta_2 f(y) & \beta_2^2 f(y) \end{vmatrix}$$

$$= 144 \begin{vmatrix} (a_0 a_1 a_2 \mathfrak{X} x) & (a_1 a_2 a_3 \mathfrak{X} x) \\ (a_1 a_2 a_3 \mathfrak{X} y) & (a_2 a_3 a_4 \mathfrak{X} y) \end{vmatrix} + 144 \begin{vmatrix} (a_2 a_3 a_4 \mathfrak{X} x) & (a_1 a_2 a_3 \mathfrak{X} x) \\ (a_1 a_2 a_3 \mathfrak{X} y) & (a_0 a_1 a_2 \mathfrak{X} y) \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$(34)\qquad H(x|y) = 144\,[x_1^2 (A_0 A_1 A_2) + 2 x_1 x_2 (B_0 B_1 B_2) + x_2^2 (C_0 C_1 C_2)],$$

wenn

$$(35)\qquad \begin{aligned} A_0 &= 2(a_0 a_2 - a_1^2), \\ A_1 &= a_0 a_3 - a_1 a_2, \\ A_2 &= a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 + a_2^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_0 &= A_1, \\ B_1 &= 2(a_1 a_3 - a_2^2), \\ B_2 &= a_1 a_4 - a_2 a_3, \end{aligned}$$

$$C_0 = A_2,$$
$$C_1 = B_2,$$
$$C_2 = 2(a_2 a_4 - a_3^2)$$

gesetzt ist. Faßt man umgekehrt die Kovariante (34) als gegeben auf, so hat man zur Ausführung der inversen Operation Ω^{-2} in diesem Falle zu setzen

$$(36)\qquad \begin{aligned} \Omega_1^{-2} &= \frac{1}{\alpha_1^2 \beta_2^2} + 2\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^3\beta_2^3} + 3\frac{\alpha_2^2\beta_1^2}{\alpha_1^4\beta_2^4}, \\ \Omega_2^{-2} &= \frac{1}{\alpha_2^2 \beta_1^2} + 2\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^3\beta_1^3} + 3\frac{\alpha_1^2\beta_2^2}{\alpha_2^4\beta_1^4}. \end{aligned}$$

Daher wird

$$(37)\qquad \Phi_1(x|y) = \Omega_1^{-2}\, H(x|y) =$$

$$144\left[\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}\,\frac{(A_0 A_1 A_2)}{\beta_2^2} + 2\,\frac{x_1 x_2}{\alpha_1^2}\,\frac{(B_0 B_1 B_2)}{\beta_2^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_1^2}\,\frac{(C_0 C_1 C_2)}{\beta_2^2}\right.$$

$$+ 2\frac{\alpha_2 x_1^2}{\alpha_1^3}\,\frac{\beta_1(A_0 A_1 A_2)}{\beta_2^3} + 4\,\frac{\alpha_2 x_1 x_2}{\alpha_1^3}\,\frac{\beta_1(B_0 B_1 B_2)}{\beta_2^3} + 2\,\frac{\alpha_2 x_2^2}{\alpha_1^3}\,\frac{\beta_1(C_0 C_1 C_2)}{\beta_2^3}$$

$$\left. + 3\frac{\alpha_2^2 x_1^2}{\alpha_1^4}\,\frac{\beta_1^2(A_0 A_1 A_2)}{\beta_2^4} + 6\,\frac{\alpha_2^2 x_1 x_2}{\alpha_1^4}\,\frac{\beta_1^2(B_0 B_1 B_2)}{\beta_2^4} + 3\,\frac{\alpha_2^2 x_2^2}{\alpha_1^4}\,\frac{\beta_1^2(C_0 C_1 C_2)}{\beta_2^4}\right]$$

oder ausgerechnet

(38) $$\Phi_1(x|y) =$$
$$x_1^4(00A_0\ A_1\ A_2) + 4x_1^3x_2(00B_0\ B_1\ B_2) + 6x_1^2x_2^2(00C_0C_1C_2)$$
$$+ x_1^4(000\,|\,2B_0|\,2B_1) + 4x_1^3x_2(000\,|\,2C_0|\,2C_1)$$
$$+ x_1^4(000\ \ 0\ |\ 3C_0)$$

und nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder mit Rücksicht auf die Identitäten $B_0 = A_1$, $C_0 = A_2$ und $B_2 = C_1$

(39) $$\Phi_1(x|y) = x_1^4(00A_0|3A_1|4A_2 + 2B_1)$$
$$+ 4x_1^3x_2(00A_1|2A_2 + B_1|3B_2)$$
$$+ 6x_1^2x_2^2(00A_2B_2C_2)\,.$$

Um nun auch

(40) $$\Phi_2(x|y) = \Omega_2^{-2}H(x|y)$$

zu bilden, hat man nur dem vorangehenden Beispiel entsprechend in Φ_1 die Variabeln x_i mit y_i zu vertauschen. Es ergibt sich sodann

(41) $$\Phi_2(x|y) = 6x_1^2x_2^2(A_0A_1A_200)$$
$$+ 4x_1x_2^3(3A_1|2A_2 + B_1|B_2|00)$$
$$+ x_2^4(4A_2 + 2B_1|3B_2|C_2|00)\,.$$

Aus (39) und (41) erhält man das Büschel

(42) $$\varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1)\,,$$

dessen sämtliche Formen die gleiche polarisierte Hessesche Kovariante besitzen wie das Produkt $f(x)f(y)$ der Urformen selbst. Um nun das Büschel zu einem vollständigen zu machen, müssen wir zu (42) noch den allgemeinsten Ausdruck Φ_0 addieren, der der Bedingung $\Omega^2\Phi_0 = 0$ genügt. Nach den früheren Darlegungen hat Φ_0 die Form

(43) $$\Phi_0 = \Omega^{-1}\Pi_1 + \Pi_2\ ,$$

wo Π_1 und Π_2 zwei allgemeine Polaren sind, deren Ordnungen in den x und y so gewählt werden müssen, daß die Homogenität des entstehenden Ausdruckes gewahrt bleibt. Im vorliegenden Falle muß Π_1 von der Ordnung 3 und Π_2 von der Ordnung 4 sein. Wir setzen zu dem Zwecke

(44) $$\varphi_1(x|y) = 16\,(b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6\,\mathfrak{x}\,x_1|x_2)\ ,^1)$$
$$\varphi_2(x|y) = \quad (c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8\,\mathfrak{x}\,x_1|x_2)\,.$$

[1]) Der Faktor 16 in φ_1 hat wieder den Zweck, den Ausdruck (49) S. 68 von einem Zahlfaktor zu befreien.

Dann sei

$$\Pi_1 = 16\left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^3 \varphi_1 \tag{45}$$

und

$$\Pi_2 = \left[y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^4 \varphi_2 \tag{46}$$

oder ausgerechnet

$$\Pi_1 = 16[x_1^3(b_0b_1b_2b_3) + 3x_1^2x_2(b_1b_2b_3b_4) + 3x_1x_2^2(b_2b_3b_4b_5) + x_2^3(b_3b_4b_5b_6)] \tag{47}$$

und

$$\Pi_2 = x_1^4(c_0c_1c_2c_3c_4) + 4x_1^3x_2(c_1c_2c_3c_4c_5) + 6x_1^2x_2^2(c_2c_2c_4c_5c_6) + 4x_1x_2^3(c_3c_4c_5c_6c_7) + x_2^4(c_4c_5c_6c_7c_8). \tag{48}$$

Löst man nun die Gleichung

$$\Psi = \Omega^{-1}\Pi_1 \tag{49}$$

durch Ausführung der Operation[1])

$$\Omega_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\beta_2} + \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\beta_1^2}{\alpha_1^3\beta_2^3} + \frac{\alpha_2^3\beta_1^3}{\alpha_1^4\beta_2^4} \tag{50}$$

auf, so erhält man

$$\begin{aligned}\Psi = {} & x_1^4(0\,b_0b_1b_2b_3) + 4x_1^3x_2(0\,b_1b_2b_3b_4) + 6x_1^2x_2^2(0\,b_2b_3b_4b_5) + 4x_1x_2^3(0\,b_3b_4b_5b_6) \\ & + x_1^4(0\,0\,b_1b_2b_3) + 4x_1^3x_2(0\,0\,b_2b_3b_4) + 6x_1^2x_2^2(0\,0\,b_3b_4b_5) \\ & + x_1^4(0\,0\,0\,b_2b_3) + 4x_1^3x_2(0\,0\,0\,b_3b_4) \\ & + x_1^4(0\,0\,0\,0\,b_3)\end{aligned} \tag{51}$$

oder durch Zusammenfassung gleichartiger Glieder

$$\begin{aligned}\Psi = {} & x_1^4(0|b_0|2\,b_1|3\,b_2|4\,b_3) + 4x_1^3x_2(0|b_1|2\,b_2|3\,b_3|3\,b_4) \\ & + 6x_1^2x_2^2(0|b_2|2\,b_3|2\,b_4|2\,b_5) + 4x_1x_2^3(0\,b_3b_4b_5b_6).\end{aligned} \tag{52}$$

Addiert man schließlich (48) und (52), so entsteht das Zusatzglied Φ_0, das das Büschel

$$\Phi(x|y) = \Phi_0 + \varkappa\Phi_1 + \lambda\Phi_2 \qquad (\varkappa + \lambda = 1) \tag{53}$$

zu einem vollständigen macht. Als allgemeinste Lösung der Gleichung $\Omega^2\Phi = H(x|y)$ muß daher (53) das Produkt f(x)f(y) der Urformen selbst enthalten.

---

[1]) s. S. 64, Fußnote 2.

§ 10.

Kovarianten einer Variabelnreihe. Kovarianten im engeren Sinne.

Die angeführten Beispiele haben gezeigt, daß der Umkehrungsalgorithmus des Ω-Prozesses ein vollständiges Formenbüschel $\Phi(x|y)$ zu erzeugen vermag, das sämtliche Formen enthält, die in einer vorgeschriebenen polarisierten Kovariante $C(x|y)$ übereinstimmen. Unter einer polarisierten Kovariante verstanden wir eine solche Form von mindestens zwei Reihen Veränderliche, die in eine Kovariante einer einzigen Variabelnreihe übergeht, falls man in ihr die einzelnen Reihen identisch gleich setzt. Ist z. B.

$$C(x|y) = \Omega^n f(x) f(y) \tag{1}$$

eine polarisierte Kovariante, die also in den Koeffizienten der Urform $f(x)$ quadratisch ist, so geht der Ausdruck (1) in eine wirkliche Kovariante von $f(x)$ über, wenn man in ihm $x_i \equiv y_i$ setzt. Bildet man nun mit Hilfe der Umkehrung des Ω-Prozesses die Form $\Phi(x|y)$ als allgemeinste Lösung der Gleichung

$$C(x|y) = \Omega^n \Phi(x|y), \tag{2}$$

so muß die entstehende Funktion $\Phi(x|y)$ insbesondere das Produkt $f(x)f(y)$ der Ausgangsformen enthalten. Hieraus folgt, daß man beim Übergang zu Kovarianten einer einzigen Reihe Veränderliche aus $\Phi(x|y)$ durch die Identifizierung $x_i \equiv y_i$ nicht die Urform selbst, sondern nur ihr Quadrat oder allgemein irgendeine Potenz derselben erhält. Zur vollständigen Regenerierung der Urform $f(x)$ hat man also noch die Bedingungen anzugeben, unter denen die Form $\Phi_{(x_i \equiv y_i)}$ die n^{te} Potenz einer anderen Form wird. Untersuchungen in dieser Richtung sind insbesondere von Hilbert[1]) und Wellstein[2]) ausgeführt, auf die wir hiermit verweisen.

[1]) Math. Ann., Bd. 27.
[2]) Math. Ann., Bd. 52.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Am 23. Oktober 1883 wurde ich, Renatus Theodor Willy Bürger, Sohn des Lazarettverwaltungsdirektors a. D. Rechnungsrat Karl Bürger zu Wiesbaden, evangelischer Konfession, in Spandau geboren. Meine Schulbildung empfing ich auf dem Domgymnasium zu Magdeburg, den Gymnasien zu Gleiwitz, Göttingen und Hagenau i. Els., woselbst ich Herbst 1902 das Zeugnis der Reife erhielt. Ich widmete mich dem Studium der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften auf den Universitäten Göttingen und Straßburg. Dezember 1906 bestand ich in Straßburg die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen und trat darauf in den höheren Schuldienst für Elsaß-Lothringen ein. Nach Ableistung eines Probejahres an den Gymnasien zu Schlettstadt und Oberehnheim wurde ich Ostern 1908 nach Preußen überwiesen und fand zunächst an der Oberrealschule zu Duisburg Beschäftigung. Juli 1909 wurde ich sodann am städtischen Realgymnasium in Elberfeld als Oberlehrer fest angestellt, in welcher Eigenschaft ich auch jetzt noch daselbst tätig bin.